Потоки событий.

Одним из важных понятий теории случайных процессов является понятие потока событий.

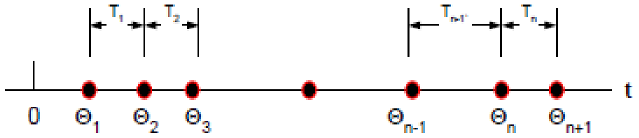
Определение. **Поток событий** – последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени.

Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток автомашин, подъезжающих на заправку; поток заболеваний гриппом в зимний сезон; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток заявок на ремонт и тд.

События, образующие поток, в общем случае могут быть и неоднородными, например, если в потоке автомашин, прибывающих на заправку, различать легковые и грузовые.

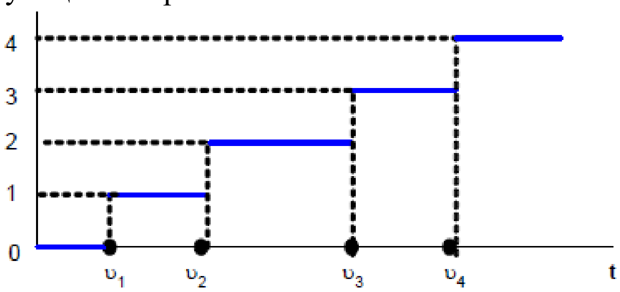
Заметим, что термин «событие» в понятии «поток событий» совершенно отличен по смыслу от понятия «случайное событие», широко применяемого в теории вероятностей. Мы не рассматриваем вероятности наступления событий, предполагая, что рано или поздно они произойдут. С потоком событий можно связывать различные случайные события, например, «в течение определенного времени придет хотя бы один вызов на телефонную станцию». Вероятности таких событий можно вычислять.

Поток событий представляет собой в общем случае просто последовательность случайных точек $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ на оси времени с разделяющими их случайными интервалами $T_1, T_2, ..., T_n$, так что $T_1 = \theta_2 - \theta_1, T_2 = \theta_3 - \theta_2, ..., T_n = \theta_{n+1} - \theta_n$.



Потоки событий различаются между собой по их внутренней структуре – по законам распределения интервалов $T_1, T_2, ..., T_n$ между событиями, их взаимной зависимости или независимости и тд.

С потоком однородных событий можно связать случайный процесс их накопления. Обозначим $X(t)$ - число событий потока, появившихся до момента времени t. Каждая реализация случайного процесса $X(t)$ представляет собой ступенчатую ломаную линию, подскакивающую на единицу в момент появления очередного события и сохранающую свое значение до появления следующего события в потоке. Здесь моменты появления события уже не случайны и обозначены $v_1, v_2, ..., v_n$ - неслучайная функция от времени t.



С первого взгляда наиболее простым представляется поток событий, в котором интервалы между событиями строго одинаковы и равны неслучайной величине τ. Такой поток событий называется **регулярным**. Примеры регулярных потоков представляют собой поток изменений минутной цифры на электронных часах. Регулярный поток событий довольно редко встречается на практике, он представляет определенный интерес только как предельный случай для других потоков. Однако несмотря на свою видимую простоту, регулярный поток не имеет преимуществ при математическом анализе, так как намного уступает по простоте проведения расчетов другим типам потоков.

Свойства потоков.

1. **Ординарность**. Поток событий называется **ординарным**, если события в нем появляются по одиночке, а не «пачками» по 2, 3 и тд. Дадим этому свойству математическую формулировку. Рассмотрим участок Δt, примыкающий к точке t. Ординарность потока означает, что вероятность попадания на участок двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания на него ровно одного события, то есть при $\Delta t \to 0$ эта вероятность представляет собой бесконечно малую величину. Обозначим через $p_1(t, \Delta t)$ вероятность попадания на участок $(t, t+\Delta t)$ ровно одного события, $p_0(t, \Delta t)$- вероятность непопадания на него ни одного события, $p_{>1}(t, \Delta t)$ -

вероятность попадания на него более одного события. Очевидно, что $p_0(t,\Delta t)+p_1(t,\Delta t)+p_{>1}(t,\Delta t)=1$. Очевидно, что при малом Δt вероятность $p_0(t,\Delta t)$ - самая большая. Для ординарного потока событий вероятность $p_{>1}(t,\Delta t)$ пренебрежимо мала по сравнению с другими слагаемыми: $p_{>1}(t,\Delta t)=o(\Delta t)$. Примеры ординарных потоков событий: поток деталей, поступающих на конвейер для сборки; пото отказов технического устройства. Примеры неординарных потоков: поток пассажиров, прибывающих в лифте на данный этаж. Далее рассматриваются только ординарные потоки.

Обозначим $X(t,\Delta t)$ - случайное число событий, попадающих на участок $(t,t+\Delta t)$.

$$X(t,\Delta t)=\left|\begin{array}{c|c|c} 0 & 1 & \ldots \\ \hline p_0(t,\Delta t) & p_1(t,\Delta t) & \end{array}\right|,$$

Найдем математическое ожидание с.в. $X(t,\Delta t)$: $E(X(t,\Delta t))=0\cdot p_0(t,\Delta t)+1\cdot p_1(t,\Delta t)+a\cdot p_{>1}(t,\Delta t)$

Значит, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{E(X(t,\Delta t))}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{1\cdot p_1(t,\Delta t)+a\cdot p_{>1}(t,\Delta t)}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}$

Определение. **Интенсивность** потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени, для участка $(t,t+\Delta t)$)

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_1(t,\Delta t)}{\Delta t}$$

Интенсивность потока событий может быть любой неотрицательной функцией времени, имеет размерность 1/время.

2. **Отсутствие последействия**. Поток событий называется потоком без последействия, если вероятность наступления k событий в течение промежутка времени $(t,t+\Delta t)$ не зависит от того, сколько раз и как появлялись события ранее. В частности, отсутствие последействия означает взаимную независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

3. **Стационарность**. Поток событий называется стационарным, если все его вероятностные характеристики не меняются со временем.

В частности, для стационарного потока событий вероятность попадания того или иного числа событий на участок длины τ зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси времени этот участок расположен. Это значит, что числа событий $X_1(t_1,\tau)$ и $X_2(t_2,\tau)$, попадающих на два участка одинаковой длины τ, будут иметь одинаковое распределение. Отсюда следует, в частности, что для стационарного потока событий его интенсивность постоянна: $\lambda(t)=\lambda=const$.

Утверждение. Если поток без последействия, ординарен и имеет постоянную интенсивность λ, то число событий $X(t,\tau)=X(\tau)$, попадающих на участок времени длины τ, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\tau$:

$$P(X(\tau)=k)=\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},\ k=0,1,2,..$$

Определение. Поток событий, обладающий всеми тремя свойствами, то есть ординарный, стационарный и без последействия, называется **простейшим** (или **стационарным пуассоновским**) потоком. Простейшим этот поток назван потому, что исследование систем, находящихся под воздействием простейших потоков, проводится самым простым образом.

Итог:

$X(\tau)$ - случайная величина, равная числу точек, попадающих на участок времени длины τ, имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda\tau$:

$P_k(\tau)=P(X(\tau)=k)=\dfrac{(\lambda\tau)^k}{k!}e^{-\lambda\tau},\ k=0,1,2,..$ - вероятность того, что за время τ произойдет ровно k событий

$EX(\tau)=\lambda\tau$

$P_0(\tau)=P\left(X(\tau)=0\right)=e^{-\lambda\tau}$ - вероятность того, что за время τ не произойдет ни одного события

Пусть T - промежуток времени между двумя произвольными соседними событиями в простейшем потоке. Найдем функцию распределения $F(t)=P(T<t)=1-P_0(\tau)$.

$F(t)=1-e^{-\lambda t}$, $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ - показательный закон распределения.

Задача 1. В бюро обслуживания в среднем поступает 12 заявок в час. Считая поток заказов простейшим, определить вероятность того, что: а) за 1 минуту не поступит ни одного заказа, б) за 10 минут поступит не более трех заказов.

Решение. Сначала найдем интенсивность потока, выразив ее в количестве заявок в минуту. Очевидно, эта величина равна $\lambda=\frac{12}{60}=0,2$.

Далее находим вероятность того, что за время t = 1 мин не поступит ни одной заявки по формуле:

$P_0(1)=e^{-0,2\cdot 1}\approx 0,819$

Вероятность того, что за 10 минут поступит не более трех заказов:

$$P(m\le 3)=\sum_{m=0}^{3}\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}=e^{-2}+2e^{-2}+\frac{4}{2}e^{-2}+\frac{8}{6}e^{-2}=\frac{19}{3}e^{-2}=0,8571$$

Задача 2. В ресторан прибывает в среднем 20 посетителей в час. Считая поток посетителей простейшим, и зная, что ресторан открывается в 11.00, определите:

а) вероятность того, что в 11.12 в ресторан придет 20 посетителей при условии, что в 11.07 их было 18

б) вероятность того, что между 11.28 и 11.30 в ресторане появится новый посетитель, если известно, что предшествующий посетитель прибыл в 11.25.

Решение. а) Надо найти вероятность того, что в промежуток от 11.07 до 11.12 ($t=5$ минут) придет ровно 2 посетителя. При этом мы знаем интенсивность потока посетителей $\lambda=\frac{20}{60}=1/3$ посетителей в минуту.

$$P_2(5)=\frac{\left(\frac{1}{3}\cdot 5\right)^2}{2!}e^{-\frac{1}{3}\cdot 5}\approx 0,2623$$

б) Нам не сказано, сколько именно новых посетителей будет в промежутке от 11.28 до 11.30, главное чтобы был хоть один. Эта вероятность равна $1-P_0(2)=1-e^{-2/3}\approx 0,4866$. Здесь $P_0(2)$ – вероятность того, что в этом промежутке не будет ни одного посетителя.

Задача 3. В течение лекции примерно каждые 15 минут появляется новая формула. Считая поток новых формул простейшим, найти вероятности того, что: а) в течение получаса не будет новых формул, б) если в течение предыдущих 15 минут не было новых формул, то и в следующие 15 минут их не будет, в) в течение пары будет по крайней мере 2 новые формулы.