Марковские случайные процессы.

Определение. **Марковский случайный процесс с непрерывным временем и дискретным множеством значений** $S(t)$ – случайный процесс, принимающий значения при каждом $t \geq 0$ из множества $s_1, s_2, ..., s_i$, если для любых моментов $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$ выполнено

$P\{S(t_3) = s_j \mid S(t_2) = s_i, S(t_1) = s_m\} = P\{S(t_3) = s_j \mid S(t_2) = s_i\}$

Определение. **Переходная** вероятность марковского процесса из состояния s_i в состояние s_j - функция $p_{ij}(t_1, t_2) = P\left(S(t_2) = s_j \middle| S(t_1) = s_i\right)$, где $0 \leq t_1 \leq t_2$.

Напомним: $\sum\limits_{j=1,n} p_{ij}(t_1, t_2) = 1$ для всех i

Определение. Вектор **распределения вероятностей** состояний системы в момент времени $t \geq 0$ $p(t) = \{p_1(t), p_2(t), ..., p_i(t), ..., p_n(t)\}$, где $p_i(t) = P(S(t) = s_i)$.

Напомним, что $\sum\limits_{i=1,n} p_i(t) = 1$.

Теорема (Аналогично дискретным процессам). Пусть $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3$, тогда

$p_j(t_2) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t_1) \cdot p_{ij}(t_1, t_2)$, или $p_j(t + \Delta t) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i(t) \cdot p_{ij}(t, t + \Delta t)$

$p_{ij}(t_1, t_3) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}(t_1, t_2) \cdot p_{kj}(t_2, t_3)$ - уравнение Чепмена-Колмогорова

Определение. Марковский процесс называется **однородным**, если $p_{ij}(t_1, t_2) = p_{ij}(t_2 - t_1)$, где $0 \leq t_1 \leq t_2$, то есть переходные вероятности зависят только от разности моментов времени.

Перепишем уравнение Чепмена-Колмогорова для однородного марковского процесса

$$p_{ij}(t_3 - t_1) = \sum_{k} p_{ik}(t_2 - t_1) \cdot p_{kj}(t_3 - t_2),$$

если $t_2 - t_1 = t,\ t_3 - t_2 = \Delta t$, то

$$p_{ij}(t + \Delta t) = \sum_{k} p_{ik}(t) \cdot p_{kj}(\Delta t)$$

$$p_j(t + \Delta t) = \sum_{i=1}^{n} p_i(t) \cdot p_{ij}(\Delta t)$$

Таким образом, в этом случае переходные вероятности обладают следующими свойствами:

1. $p_{ij}(t) \geq 0$
2. $\sum\limits_{j} p_{ij}(t) = 1$ для всех i
3. $p_{ij}(0) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ - стохастическая непрерывность процесса.

Определение. **Интенсивность перехода** из состояния s_i в состояние s_j (число переходов за единицу времени) - величина $\lambda_{ij} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},\ i \neq j,\ \lambda_{ij} \geq 0$.

Определение. **Интенсивность выхода** из состояния s_i - величина $\lambda_i = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1 - p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t},\ \lambda_i \geq 0$.

Из определений следует, что:

$\lambda_i = \sum\limits_{j} \lambda_{ij}$

$p_{ii}(\Delta t) = 1 - \lambda_i \Delta t + o(\Delta t)$

$p_{ij}(\Delta t) = \lambda_{ij} \Delta t + o(\Delta t),\ i \neq j$

Можно составить матрицу интенсивностей (сумма по строкам равна 0)

$$\lambda=\left(\lambda_{ij}\right)=\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1j} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & -\lambda_2 & \dots & \lambda_{2j} & \dots & \lambda_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{i1} & \lambda_{i2} & \dots & \lambda_{ij} & \dots & \lambda_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nj} & \dots & -\lambda_n \end{pmatrix}$$

Теорема. Для однородного Марковского процесса с конечным числом состояний вероятности удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$p_j'(t)=-p_j(t)\cdot\lambda_j+\sum_{i\neq j}p_i(t)\lambda_{ij}$$

$$\sum_{i=1,n}p_i(t)=1$$

с начальными условиями $p(0)$.

Доказательство. $p_j(t+\vartriangle t)=\sum_i p_i(t)\cdot p_{ij}(\vartriangle t)=p_j(t)\left(1-\lambda_j\vartriangle t+o(\vartriangle t)\right)+\sum_{i\neq j}p_i(t)\cdot\left(\lambda_{ij}\vartriangle t+o(\vartriangle t)\right)$

Следовательно, $\dfrac{p_j(t+\vartriangle t)-p_j(t)}{\vartriangle t}=p_j(t)\left(-\lambda_j+\dfrac{o(\vartriangle t)}{\vartriangle t}\right)+\sum_{i\neq j}p_i(t)\cdot\left(\lambda_{ij}+\dfrac{o(\vartriangle t)}{\vartriangle t}\right)$

При $\vartriangle t\to 0$ имеем $p_j'(t)=-p_j(t)\cdot\lambda_j+\sum_{i\neq j}p_i(t)\lambda_{ij}$

В матричном виде $p'(t)=p(t)\cdot\lambda$

Предположим, что существует **стационарное распределение** Марковского процесса $\pi=(\pi_1,\dots,\pi_n)$, где $\pi_j=\lim_{t\to\infty}p_j(t)$. Поскольку стационарные вероятности не зависят от времени и являются константами, то при $t\to\infty$ производные $p_j'(t)$ становятся равными нулю, и тогда имеем уравнение в матричном виде:

$$0=\pi\cdot\lambda.$$

Покомпонентно: $\pi_j\cdot\lambda_j=\sum_{k\neq j}\pi_k\cdot\lambda_{kj}$.

Полученные уравнения называются уравнениями равновесия. Назовем произведение $\lambda_j\pi_j$ интенсивности выхода из состояния s_j и вероятности этого состояния π_j потоком вероятности из состояния s_j. Произведение $\lambda_{kj}\pi_k$ назовем потоком вероятности из состояния s_k в состояние s_j. Тогда из уравнений равновесия следует, что в стационарном режиме поток вероятности из любого состояния равен сумме потоков вероятностей из всех других состояний в данное состояние.

Задача 1. Пусть $S(t)$ - однородный Марковский процесс с двумя состояниями. Пусть $\lambda_{12}=\lambda,\ \lambda_{21}=\mu$, следовательно, $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\mu$, начальные условия: $p_1(0)=1,\ \ p_2(0)=0$.

$$\lambda=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

Система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\begin{cases} p_1'(t)=-\lambda p_1(t)+\mu p_2(t) \\ p_2'(t)=-\mu p_2(t)+\lambda p_1(t)\end{cases}$$

Поскольку $p_1(t)+p_2(t)=1$, то получаем дифференциальное уравнение:

$$p_1'(t)+(\lambda+\mu)p_1(t)=\mu$$

Однородное уравнение

$$p_1'(t)+(\lambda+\mu)p_1(t)=0\Leftrightarrow y'+(\lambda+\mu)y=0\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-(\lambda+\mu)y\Leftrightarrow\frac{dy}{y}=-(\lambda+\mu)dx\Leftrightarrow\ln y=-(\lambda+\mu)x+C_0$$

значит общее решение $p_1(t)=Ce^{-(\lambda+\mu)t}$.

Далее, $p_1(t)=C(t)e^{-(\lambda+\mu)t} \Rightarrow C'(t)=\mu e^{(\lambda+\mu)t} \Rightarrow C(t)=\frac{\mu}{(\lambda+\mu)}e^{(\lambda+\mu)t}+C_1$.

Используя начальные условия, получаем $C_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$.

Значит, решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ p_2(t)=-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

Найдем предельные вероятности при $t\to\infty$:

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}\to\pi_1=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$p_2(t)=-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\to\pi_2=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

Их можно было найти и из системы уравнений

$$\begin{cases} -\lambda\pi_1+\mu\pi_2=0 \\ \pi_1+\pi_2=1 \end{cases}$$

Обозначим время пребывания нашей цепи в состоянии 1 через ξ. Найдем его функцию распределения $F(t)=P(\xi<t)$. Обозначим $G(t)=P(\xi\ge t)$

Из определения следует, что $p_{11}(\vartriangle t)=1-\lambda\vartriangle t+o(\vartriangle t)$

Так как $G(t+\vartriangle t)=G(t)p_{11}(\vartriangle t)=G(t)\big(1-\lambda\vartriangle t+o(\vartriangle t)\big)$, то

$G'(t)=-\lambda G(t)$, $G(0)=1$. Следовательно, $G(t)=e^{-\lambda t}$

Получаем, что $F(t)=1-G(t)=1-e^{-\lambda t}$, то есть $\xi\sim E(\lambda)$.

Аналогично, время пребывания цепи в состоянии 2 имеет также экспоненциальное распределение $E(\mu)$.

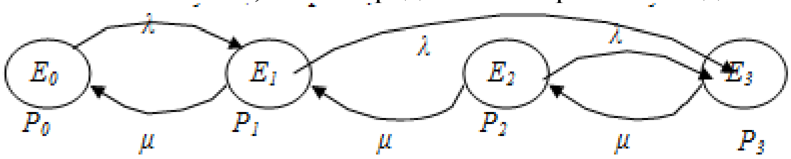
Задачи (Марковские случайные процессы с непрерывным временем)

1. Даны интенсивности переходов. Составить граф, составить систему уравнений для вероятностей состояний, найти предельные вероятности для состояний данной системы.

$\lambda_{12}=2,\ \lambda_{21}=3,\ \lambda_{13}=1,\ \lambda_{31}=3,\ \lambda_{32}=2,\ \lambda_{23}=1$

$$\lambda=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} p_1'(t)=-3p_1(t)+3p_2(t)+3p_3(t) \\ p_2'(t)=2p_1(t)-4p_2(t)+2p_3(t) \\ p_3'(t)=p_1(t)+p_2(t)-5p_3(t) \end{cases} \quad \begin{cases} 0=-3\pi_1+3\pi_2+3\pi_3 \\ 0=2\pi_1-4\pi_2+2\pi_3 \\ 0=\pi_1+\pi_2-5\pi_3 \end{cases}=\begin{cases} \pi_1=1/2 \\ \pi_2=1/3 \\ \pi_3=1/6 \end{cases}$$

2. Марковский случайный процесс с четырьмя возможными состояниями E0, E1, E2, E3 задан графом переходов. Найти матрицу интенсивности переходов. Составить систему уравнений для вероятностей состояний, найти предельные вероятности для состояний данной системы.



$$\lambda=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & 0 & \lambda \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

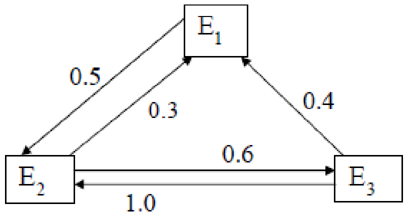
Получим систему уравнений. Вычислим вероятности при значениях $\lambda = 2$, $\mu = 1$.

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ -(\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases} = \begin{cases} \pi_0 = 1/19 \\ \pi_1 = 2/19 \\ \pi_2 = 4/19 \\ \pi_3 = 12/19 \end{cases}$$

3. Некоторая экономическая система может находиться в одном из трех состояний: E1, E2, E3. При этом состояния E1 и E2 приносят, соответственно, 2000 и 500 уе/сут прибыли. В состоянии E3 экономическая система терпит 4500 уе/сут убытков. Интенсивности переходов между состояниями таковы:

Из E1 в E2 – 0,5 1/сут,	Из E2 в E1 – 0,3 1/сут,
Из E2 в E3 – 0,6 1/сут,	Из E3 в E2 – 1 1/сут,
Из E1 в E3 – переход невозможен,	Из E3 в E1 – 0,4 1/сут.

Изобразить граф системы, записать систему уравнений для вероятностей состояний. Найти предельные вероятности для состояний данной системы, Вычислить среднюю суточную прибыль системы.



$$\lambda = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 0,3 & -0,9 & 0,6 \\ 0,4 & 1 & -1,4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} p_1'(t) = -0,5p_1(t) + 0,3p_2(t) + 0,4p_3(t) \\ p_2'(t) = 0,5p_1(t) - 0,9p_2(t) + p_3(t) \\ p_3'(t) = 0,6p_2(t) - 1,4p_3(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -0,5\pi_1 + 0,3\pi_2 + 0,4\pi_3 \\ 0 = 0,5\pi_1 - 0,9\pi_2 + \pi_3 \\ 0 = 0,6\pi_2 - 1,4\pi_3 \end{cases} = \begin{cases} \pi_1 = 66/166 \approx 0,398 \\ \pi_2 = 70/166 \approx 0,422 \\ \pi_3 = 30/166 \approx 0,181 \end{cases}$$

Средняя суточная прибыль системы: $A = 66/166 \cdot 2000 + 70/166 \cdot 500 - 30/166 \cdot 4500 = 192,5$ уе/сут