8. Элементы линейного программирования

8.1. Задачи линейного программирования

Математическое программирование изучает методы моделирования и решения оптимизационных задач, а также методы исследования адекватности построенных моделей. В процессе математического моделирования системы обычно вводятся величины, описывающие систему, строятся соотношения, которым они удовлетворяют, а также формулируется цель — вводится функция, которую нужно оптимизировать.

Пусть состояния моделируемой системы описываются набором параметров $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_j \in \mathbf{R}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через U множество допустимых состояний системы, $U \subset \mathbf{R}^n$. Пусть $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — целевая функция. Задача оптимизации состоит в том, чтобы среди допустимых состояний системы найти такое, в котором целевая функция достигает наименьшего или наибольшего значения на U. В задачах линейного программирования область U допустимых состояний задается системой линейных уравнений и неравенств, а целевая функция F линейна.

Общая задача линейного программирования состоит в следующем. Пусть $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — *линейная форма*, т. е. такая функция, что $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c_0$, где c_j — некоторые действительные числа для $j = 0, 1, \ldots, n$. Требуется найти максимальное (или минимальное) значение линейной формы F на множестве U решений системы S линейных уравнений и неравенств вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \end{cases}$$

Форма F называется *целевой функцией*, а система S — *системой ограничений* задачи. Любое решение этой системы называется *допустимым* или *опорным планом*, а решение системы S, на котором целевая функция достигает оптимального значения — *оптимальным планом*.

Пример 1. *Задача об использовании ресурсов*. Пусть некоторое предприятие для выпуска n видов продукции имеет m видов ресурсов в количествах b_1, b_2, ..., b_m соответственно. Для производства единицы продукции j–го вида требуется a_{ij} единиц ресурсов i–го вида, при этом прибыль от ее продажи составляет c_j денежных единиц. Требуется составить такой план выпуска продукции, чтобы прибыль от ее продажи была наибольшей.

Для удобства запишем данные задачи в виде таблицы:

Ресурсы	Виды продукции				Запасы
	1	2	…	n	
1	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	b_1
2	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	b_2
…			. . .		...
m	a_{m1}	a_{m2}	…	a_{mn}	b_m
Прибыль	c_1	c_2	…	c_n	

Обозначим через x_j — количество единиц выпускаемой продукции j–го вида. Общее количество затрачиваемых ресурсов i–го вида не превосходит b_i, поэтому должно выполняться условие

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \text{ для } i = 1, 2, \ldots, m.$$

Кроме этого, значения неизвестных, очевидно, должны быть неотрицательны. Таким образом, система ограничений задачи имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \quad ... \quad ... \quad ..., \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,...,n. \end{cases}$$

По условию общая прибыль от продажи продукции равна $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Следовательно, задача формулируется следующим образом. Требуется найти такой допустимый план, чтобы значение целевой функции

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n,$$

было наибольшим.

8.2. Геометрический метод решения задач линейного программирования

Пусть число неизвестных задачи линейного программирования равно двум. Тогда, если позволяют исходные данные, эту задачу можно решить геометрически.

Пример 2. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$F = x + 2y \to \max,$$

$$\begin{cases} x - y \geq -1, \\ 2x + y \leq 10, \\ x + y \geq 4, \\ x \geq 0, y \geq 0. \end{cases}$$

Каждый план можно изобразить точкой на плоскости (рис. 8.1). Построим на координатной плоскости множество допустимых решений.

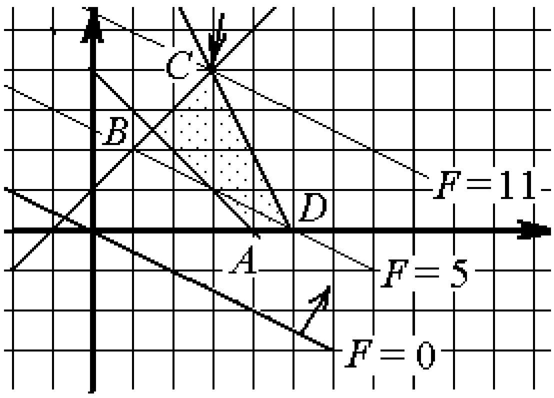

Рис. 8.1. Геометрический метод

Множество точек, удовлетворяющих системе ограничений, образует четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(4; 0)$, $B(1,5; 2,5)$, $C(3; 4)$ и $D(5; 0)$.

Проведем прямую l, задаваемую уравнением $F = 0$, или $x + 2y = 0$. Отметим, что на любой прямой, заданной уравнением вида $x + 2y = c$, значения линейной формы F одинаковы (равны c) и увеличиваются с ростом c. Вектор (1, 2), перпендикулярный прямой l, задает направление возрастания значений линейной формы. Максимальное значение линейной формы F на множестве точек четырехугольника $ABCD$ достигается в вершине $C(3; 4)$, при этом $F = 11$. Заметим, что никакая прямая, заданная уравнением $x + 2y = c$, при $c > 11$ не пересекает четырехугольник $ABCD$. Таким образом, оптимальным решением задачи является решение $x^* = (3; 4)$, в котором целевая функция F достигает максимального значения F^*, и это значение равно 11.

Пример 3. Рассмотрим также следующую задачу линейного программирования: найти максимум целевой функции $F = 2x + y$ на множестве U допустимых состояний примера 2. Очевидно, что целевая функция достигает своего наибольшего значения F^* в любой точке отрезка CD, где $C(3; 4)$ и $D(5; 0)$ (рис. 8.1). При этом $F^* = 5$. В этом случае оптимальных решений бесконечно много, но среди них есть вершина множества допустимых состояний.

Заметим, что множество U допустимых состояний выпукло и что хотя бы одно оптимальное решение задачи является вершиной множества U. Покажем, что это верно и в общем случае.

8.3. Симплексный метод решения задач линейного программирования

8.3.1. Выпуклые множества

Определение. Множество D называется *выпуклым*, если для любых двух его точек A и B отрезок $[A; B]$ содержится в этом множестве.

Пример 4. Треугольник и круг являются примерами выпуклых множеств на плоскости.

Утверждение 1. Произвольное пересечение выпуклых множеств выпукло.

Доказательство. Пусть D_i — выпуклое множество, для $i \in I$ и точки A и B принадлежат множеству $\bigcap_{i \in I} D_i$. Тогда точки A и B принадлежат множеству D_i, для всех индексов i. Но множество D_i — выпукло, поэтому отрезок $[A; B]$ содержится в D_i для каждого i, и, следовательно, в пересечении $\bigcap_{i \in I} D_i$ этих множеств.

Определение. *Вершиной выпуклого множества* D называется точка M, не являющаяся внутренней точкой отрезка $[A; B]$ ни для каких точек A и B множества D.

Пример 5. Треугольник на плоскости имеет три вершины.

Пример 6. Вершиной круга является каждая точка окружности, его границы.

Утверждение 2. Множество решений U линейного неравенства

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \le b,$$

где $a_1, a_2, \dots a_n, b \in \mathbf{R}$, выпукло.

Доказательство. Положим $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и пусть M — произвольная точка множества U. Обозначим $OM = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, тогда неравенство запишется в виде $(a, OM) \le b$. Пусть A и B — произвольные точки, принадлежащие множеству U. Тогда для любой точки M отрезка $[A; B]$ имеем: $OM = (1 - \mu)OA + \mu OB$, где $0 \le \mu \le 1$. Следовательно,

$$(a, OM) = (a, (1 - \mu)OA + \mu OB) =$$
$$= (1 - \mu)(a, OA) + \mu(a, OB) \le (1 - \mu)b + \mu b = b.$$

Таким образом, любая точка отрезка $[A; B]$ принадлежит множеству U, поэтому множество U выпукло.

Точно так же, множество решений линейного уравнения $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ выпукло, для $a_1, a_2, \dots a_n, b \in \mathbf{R}$.

Следствие. Множество допустимых состояний произвольной задачи линейного программирования выпукло.

Пусть F — линейная форма, такая что

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0,$$

и M — точка $\mathbf{R}^n$ с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Положим $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Тогда функцию F можно записать следующим образом: $F(M) = (c, OM) + c_0$.

Утверждение 3. Если оптимальное решение x^* задачи линейного программирования единственно, то оно достигается в вершине множества U допустимых состояний.

Доказательство. Пусть целевая функция F имеет вид $F(M) = (c, OM) + c_0$, и ее наибольшее значение F^* достигается в точке P. Предположим, что точка P не является вершиной множества U. Тогда найдутся такие точки A и B множества U, что

$$OP = (1 - \mu)OA + \mu OB,$$

где $0 < \mu < 1$. Следовательно,

$$F^* = F(P) = (c, (1 - \mu)OA + \mu OB) + c_0 =$$
$$= (1 - \mu)(c, OA) + \mu(c, OB) + c_0 =$$
$$= (1 - \mu)((c, OA) + c_0) + \mu((c, OB) + c_0) =$$
$$= (1 - \mu)F(A) + \mu F(B) < (1 - \mu)F^* + \mu F^* = F^*,$$

что невозможно.

8.3.2. Основная задача линейного программирования

Покажем, что любую задачу линейного программирования можно привести к некоторому каноническому виду.

Основная задача линейного программирования — это задача вида

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + c_0 \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

при этом все свободные члены системы ограничений-равенств неотрицательны.

Утверждение 4. Если множество допустимых состояний задачи линейного программирования имеет хотя бы одну вершину и существует оптимальное решение этой задачи, то найдется такая вершина множества допустимых состояний, в которой целевая функция достигает оптимального значения.

Утверждение 5. Любую задачу линейного программирования можно привести к эквивалентной основной задаче линейного программирования.

Доказательство. Пусть в задаче линейного программирования имеется ограничение-неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \leq b$, где $b \geq 0$. Положим $y = b - a_1x_1 - a_2x_2 - \dots - a_nx_n$. Тогда выполняется условие $y \geq 0$. Заменим указанное ограничение-неравенство ограничением-равенством $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + y = b$ с дополнительной переменной y и условием $y \ge 0$. Очевидно, что решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ неравенства $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \le b$ и решение $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ системы:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + y = b, \\ y \ge 0 \end{cases}$$

однозначно восстанавливаются одно из другого.

Аналогично, неравенство $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \ge b$, где $b \ge 0$, соответствует системе соотношений вида:

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - y = b, \\ y \ge 0. \end{cases}$$

Далее, если неизвестная x задачи может принимать любое значение, не обязательно неотрицательное, то положим $x = u - v$, и добавим условия $u \ge 0$ и $v \ge 0$ в систему ограничений.

Наконец, очевидно, что наименьшее значение целевой функции F достигается в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда, когда в этой же точке функция F', такая, что $F' = -F$, принимает наибольшее значение. Поэтому задача на отыскание минимума целевой функции F эквивалентна задаче на отыскание максимума целевой функции F' для той же системы ограничений.

Пример 6. Пусть задача линейного программирования имеет вид:

$$F = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 \le -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 \ge 2, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Тогда эквивалентная этой задаче основная задача линейного программирования записывается следующим образом:

$$F' = -x_1 - 2x_2 - 3u + 3v \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + y_1 = 3, \\ -x_1 + x_2 - u + v - y_2 = 4, \\ x_1 + x_2 - u + v - y_3 = 2, \\ x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, u, v \ge 0. \end{cases}$$

Рассмотрим множество вершин множества U допустимых состояний основной задачи линейного программирования.

Определение. Частное решение x° системы линейных уравнений S, полученное при нулевых значениях свободных неизвестных, называется *базисным*.

Заметим, что частное решение x° является базисным тогда и только тогда, когда столбцы матрицы системы, номера которых совпадают с номерами ненулевых компонент решения x°, линейно независимы.

Покажем, что вершины множества U допустимых планов основной задачи линейного программирования совпадают с допустимыми базисными решениями.

Утверждение 6. Точка $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ множества U допустимых состояний основной задачи линейного программирования является его вершиной тогда и только тогда, когда решение $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы ограничений U является базисным.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вершина множества U и компоненты $x_1, x_2, \dots, x_k$ решения x отличны от нуля, а остальные его компоненты равны нулю.

Обозначим через $A^{(j)}$ столбец матрицы A системы уравнений из U с номером j для $j = 1, 2, \dots, n$, и через B — столбец свободных членов. Тогда $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_kA^{(k)} = B$.

Предположим, что столбцы $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(k)}$ линейно зависимы. Тогда верно равенство $\lambda_1A^{(1)} + \lambda_2A^{(2)} + \dots + \lambda_kA^{(k)} = O$ для некоторых коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, не все из которых равны нулю. Выберем число μ настолько малым, чтобы числа $x_j + \mu\lambda_j$ и $x_j - \mu\lambda_j$ были положительными для $j = 1, 2, \dots, n$.

Если мы прибавим равенство $\mu\lambda_1A^{(1)} + \mu\lambda_2A^{(2)} + \dots + \mu\lambda_kA^{(k)} = O$ к равенству $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \dots + x_kA^{(k)} = B$ или вычтем первое равенство из второго, то получим, что точки $x^{(1)} = (x_1 + \mu\lambda_1, x_2 + \mu\lambda_2, \dots, x_n + \mu\lambda_n)$ и $x^{(2)} = (x_1 - \mu\lambda_1, x_2 - \mu\lambda_2, \dots, x_n - \mu\lambda_n)$ принадлежат множеству U. Но тогда

$x = \frac{1}{2}(x^{(1)} + x^{(2)})$ и, следовательно, x не является вершиной множества U, что невозможно по условию.

Таким образом, столбцы $A^{(1)}$, $A^{(2)}$, …, $A^{(k)}$ линейно независимы, поэтому решение x является базисным решением.

Обратно, пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$ — базисное решение, у которого последние p компонент, соответствующих нулевым значениям свободных неизвестных, равны нулю. Предположим, что оно является внутренней точкой отрезка, соединяющего некоторые точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ множества U. Тогда $x = (1 - \mu)x^{(1)} + \mu x^{(2)}$, где $0 < \mu < 1$. Координаты точек $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ неотрицательны, поэтому из этого равенства следует, что их последние p компонент равны нулю. Но значения свободных неизвестных однозначно определяют значения главных неизвестных. Следовательно, $x^{(1)} = x = x^{(2)}$, поэтому x — вершина множества U допустимых состояний.

Следствие. Множество вершин совокупности U допустимых состояний основной задачи линейного программирования конечно.

8.3.3. Каноническая задача линейного программирования

Из предыдущих рассуждений следует, что оптимальные решения основной задачи линейного программирования достаточно искать среди вершин множества допустимых решений этой задачи. Симплексный метод решения задач линейного программирования состоит в последовательном переходе от одной вершины к другой таким образом, чтобы значения целевой функции не уменьшались. Вершин конечное число, поэтому оптимальное решение находится за конечное число шагов.

Вершину множества допустимых состояний задачи можно найти следующим образом. Пусть основная задача линейного программирования имеет вид, приведенный в п. 8.3.2. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу линейного программирования:

$$Q = -z_1 - z_2 - \ldots - z_m \to \max,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + z_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + z_2 = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + z_m = b_m, \\ x_j \ge 0,\ j = 1,2,\ldots,n,\ z_i \ge 0, i = 1,2,\ldots,m. \end{cases}$$

Значения неизвестных неотрицательны, поэтому наибольшее значение целевой функции Q равно нулю. Выберем неизвестные $z_1, z_2, \dots, z_m$ в качестве главных неизвестных. Тогда неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ — свободные. Следовательно, базисное решение $(b_1, b_2, \dots, b_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{n})$ является вершиной множества допустимых состояний задачи. Если существует оптимальное решение этой задачи такое, что неизвестные $z_1, z_2, \dots, z_m$ в нем свободны, т. е. решение вида $(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m}, x_1, x_2, \dots x_n)$, то точка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является вершиной допустимого множества U исходной основной задачи линейного программирования.

Обратно, пусть $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вершина множества U. Тогда точка $y = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{m}, x_1, x_2, \dots x_n)$ является базисным решением вспомогательной задачи. Но в этой точке целевая функция Q равна нулю. Следовательно, y — оптимальное решение вспомогательной задачи.

Каноническая задача линейного программирования имеет вид:

$$F = c_{r+1}x_{r+1} + \dots + c_n x_n + c_0 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_s + a_{sr+1}x_{r+1} + \dots + a_{sn}x_n = b_s, \\ \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \qquad x_j \ge 0,\ j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

Вершина $(b_1, b_2, \dots, b_r, 0, \dots, 0)$ является базисным допустимым решением этой задачи, соответствующим главным неизвестным $x_1, x_2, \dots, x_r$. В этой вершине значение целевой функции равно c_0.

1°. Если $c_j \le 0$, для $j = r + 1, \dots, n$, то при увеличении значения любой свободной неизвестной значение целевой функции не увеличивается, поэтому план $(b_1, b_2, \dots, b_r, 0, \dots, 0)$ — оптимальный.

2°. Пусть $c_i > 0$, где $r + 1 \le i \le n$. Тогда с ростом значений x_i значения функции F не уменьшаются. Перейдем к новой вершине следующим образом. Выберем некоторую главную неизвестную x_k и поменяем местами неизвестные x_k и x_i в множествах главных и свободных неизвестных так, чтобы соответствующее базисное решение было допустимым. Для этого рассмотрим произвольное уравнение с номером s такое, что $a_{si} > 0$. Выразим из этого уравнения неизвестную x_i. Имеем:

$$x_i = \frac{b_s}{a_{si}} - \frac{a_{sr+1}}{a_{si}} x_{r+1} - \ldots - \frac{1}{a_{si}} x_s - \ldots - \frac{a_{sn}}{a_{si}} x_n .$$

Подставим это выражение в p-е уравнение системы для $p \neq s$, и получим уравнение вида $x_p + a'_{pr+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{ps} x_s + \ldots + a'_{pn} x_n = b'_p$, где $a'_{pj} = \dfrac{a_{pj} a_{si} - a_{pi} a_{sj}}{a_{si}}$ для $j \neq s$, $j = r + 1, \ldots, n$, $a'_{ps} = -\dfrac{a_{pi}}{a_{si}}$ и $b'_p = b_p - a_{pi} \dfrac{b_s}{a_{si}}$.

Свободные члены должны быть неотрицательны, поэтому должно выполняться неравенство $b'_p \geq 0$, для $p = 1, \ldots, r$. Если $a_{pi} \leq 0$, то условие $b'_p \geq 0$ очевидно выполняется. Пусть $a_{pi} > 0$. Тогда условие $b'_p \geq 0$ равносильно неравенству $\dfrac{b_p}{a_{pi}} \geq \dfrac{b_s}{a_{si}}$. Поэтому в качестве главной выберем такую неизвестную x_k, что

$$\frac{b_k}{a_{ki}} = \min\{\frac{b_s}{a_{si}} \mid a_{si} > 0, s = 1, \ldots, r\}.$$

Значение целевой функции F в новой вершине равно $c_i \dfrac{b_k}{a_{ki}} + c_0$, что не меньше, чем c_0.

Число $\dfrac{b_s}{a_{si}}$ при $a_{si} > 0$ называется *оценкой* неизвестной x_s; если $a_{si} \leq 0$, то оценку неизвестной x_s полагают равной ∞.

Если $a_{si} \leq 0$ для $s = 1, \ldots, r$, то множество допустимых состояний не ограничено, и целевая функция может увеличиваться неограниченно.

При применении симплексного метода используются таблицы, соответствующие расширенным матрицам систем линейных уравнений. В таблицу помещается также строка коэффициентов при неизвестных целевой функции и столбец оценок неизвестных. Эти таблицы называются *симплекс-таблицами*. Переход от таблицы к таблице осуществляется по методу Гаусса с использованием первых двух элементарных преобразований над строками матриц.

Пример 7. Рассмотрим следующую задачу линейного программирования:

$$F = x_1 - 2x_2 \to \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Очевидно, что эквивалентная основная задача имеет следующий вид:

$$F' = -x_1 + 2x_2 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + y_2 = 4, \\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для того чтобы найти вершину множества U допустимых состояний этой задачи, рассмотрим вспомогательную задачу линейного программирования вида:

$$Q = -z_1 \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - y_1 + z_1 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + y_2 = 4, \\ x_1, x_2, y_1, y_2, z_1 \ge 0. \end{cases}$$

Пусть неизвестные z_1 и y_2 — главные, тогда остальные неизвестные — свободные. Для того чтобы применить описанный выше алгоритм симплексного метода, необходимо целевую функцию Q выразить через свободные неизвестные. Вычисления проведем с использованием симплекс-таблицы. В первом столбце таблицы будем указывать главные неизвестные системы уравнений.

	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	B	Оценка
z_1	**1**	1	– 1	0	1	1	1
y_2	1	2	0	1	0	4	4
					– 1	Q	
	1	1	– 1	0	0	$Q + 1$	/* для x_1 */

Для того чтобы выразить функцию Q через свободные неизвестные, к третьей строке была прибавлена первая строка. Результат этого преобразования помещен в четвертую строку таблицы так, что $Q + 1 = x_1 + x_2 - y_1$.

Коэффициент при неизвестной x_1 в целевой функции положителен, поэтому при увеличении значения неизвестной x_1 значение функции Q не уменьшится. Проверим, можно ли неизвестную x_1 сделать одной из главных неизвестных. Оценки неизвестной x_1 равны отношениям свободных членов к коэффициентам при неизвестной x_1 в соответствующих уравнениях. В данном случае эти отношения равны 1 и 4 соответственно, так что наименьшая оценка соответствует первому уравнению системы. Пусть неизвестная x_1 будет главной, а неизвестная z_1 — свободной. Исключим неизвестную x_1 из второго уравнения и из целевой функции по методу Гаусса. Для этого вычтем из второй и четвертой строк таблицы первую строку. В результате получится следующая таблица:

	x_1	x_2	y_1	y_2	z_1	B	Оценка
x_1	1	1	– 1	0	1	1	
y_2	0	1	1	1	– 1	3	
	0	0	0	0	– 1	Q	

Теперь все коэффициенты при свободных неизвестных в целевой функции стали неположительными. Таким образом, решение (1, 0, 0, 3, 0) является оптимальным планом вспомогательной задачи, а точка (1, 0, 0, 3) соответственно вершиной множества U.

Составим симплекс-таблицу исходной основной задачи. В соответствии с описанным выше алгоритмом симплексного метода имеем:

	x_1	x_2	y_1	y_2	B	Оценка
x_1	1	**1**	– 1	0	1	1
y_2	0	1	1	1	3	3
	– 1	2	0	0	F'	
	0	3	– 1	0	$F' + 1$	/* для x_2*/
x_2	1	1	– 1	0	1	∞
y_2	0	0	**2**	1	2	1
	– 3	0	2	0	$F' - 2$	/* для y_1*/
x_2	1	1	0	0,5	2	
y_1	0	0	1	0,5	1	
	– 3	0	0	– 1	$F' - 4$	

В результате все коэффициенты при неизвестных в целевой функции стали неположительными. Следовательно, оптимальным решением канонической задачи является вершина (0, 2, 1, 0). В этой вершине целевая функция F' принимает наибольшее значение, равное 4.

Таким образом, оптимальный план исходной задачи (0, 2), а наименьшее значение целевой функции F равно (-4).

Упражнения

8.1. В каком отношении точка $M(1; 1)$ делит отрезок AB, если $A(-1; -3)$, $B(2; 3)$?

8.2. Укажите значение параметра a, при котором точка (3; 3) является решением системы линейных неравенств:

$$2x + y \geq a, \quad ax - 3y \geq 18.$$

8.3. Является ли множество $M \cup N$, где $M, N \subset \mathbf{R}^2$, выпуклым?

1) $M = \{(x, y) \mid x + y > 1\}$, $N = \{(x, y) \mid x - y < 5\}$;

2) $M = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 3x + 2y \leq 9,\ y \geq 0\}$,

$N = \{(x, y) \mid x \leq 5,\ y \geq 0,\ 3x - 2y \geq 9\}$;

3) $M = \{(x, y) \mid x - y = 1\}$, $N = \{(x, y) \mid x + y = 5\}$;

4) $M = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$, $N = \{(x, y) \mid y \geq 0\}$;

5) $M = \{(x, y) \mid x \geq 1,\ 3x + 2y \leq 9,\ \ y \geq 0\}$,

$N = \{(x, y) \mid x \geq 2,\ 3x + 2y \leq 9,\ \ y \geq 1\}$.

8.4. В какой точке множества решений системы линейных неравенств

$$\begin{gathered} x + 5y \geq 10, \\ 3x + 2y \geq 12, \\ x + 2y \geq 8, \\ x + y \geq 5,\ \ x \geq 1,\ y \geq 0, \end{gathered}$$

форма $f = 4x + 6y$ достигает наименьшего значения?

8.5. Сколько вершин имеет множество решений системы линейных неравенств:

$$\begin{gathered} -2 \leq x - y \leq 5, \\ 5 \leq 2x + y \leq 13, \\ x + 2y \geq 4, \\ x + y \leq 8, \\ y \geq 0? \end{gathered}$$

8.6. Найдите вершины выпуклого многогранника в $\mathbf{R}^5$:

$$x - 2y + z - t + u = 1,$$
$$-x + y + z + 2t - u = 0,$$
$$x, y, z, t, u \geq 0.$$

8.7. Решите задачу линейного программирования симплексным методом.

Задача об использовании ресурсов. Для изготовления трех видов продукции используется сырье двух видов – А и В. Для производства одной единицы продукции первого вида требуется по 2 единицы сырья А и В, второго вида — 1 единица сырья А и 2 единицы сырья В, третьего вида — 2 единицы сырья А и 1 единица сырья В. Запасы сырья ограничены и составляют 2 единицы сырья А и 6 единиц сырья В. Прибыль от продажи 1 единицы продукции первого и третьего видов составляет по 1 у. е., второго вида — в два раза больше. Составьте такой план производства, чтобы прибыль от продажи продукции была наибольшей.

8.8. Решите задачу линейного программирования геометрическим методом.

Задача об использовании мощностей оборудования. Требуется за 6 дней выпустить 30 единиц продукции вида I и 96 единиц продукции вида II. Каждый из видов продукции может производиться двумя машинами – А и В. Машина А за 1 день может произвести 6 единиц продукции вида I, израсходовав при этом 4 у. е., или 24 единицы продукции вида II, затратив 47 у. е. В свою очередь машина В за 1 день может произвести 13 единиц продукции любого вида. При этом на изготовление продукции первого вида расходуется 13 у. е., а второго – в 2 раза больше. Найдите, сколько времени машины А и В должны быть заняты изготовлением продукции видов I и II с тем чтобы стоимость всей продукции оказалась минимальной.

8.9. Решите задачу линейного программирования симплексным методом, используя метод искусственного базиса:

$$f = x + y + z \to \min,$$
$$2x + 3y + 2z \geq 6,$$
$$2x + 2y + z \leq 12,$$
$$x, y, z \geq 0.$$