4. Отношения

4.1. Операции над отношениями

Напомним, что подмножество R декартова произведения $A \times B$ называется бинарным отношением между множествами A и B.

Упражнение. Пусть $| A | = n$, $| B | = m$. Найдите:

1. Количество бинарных отношений между множествами A и B (ответ: 2^{nm}).

2. Количество всюду определенных отношений между множествами A и B (ответ: $(2^m - 1)^n$).

3. Количество функциональных отношений между множествами A и B (ответ: $(m + 1)^n$).

Отношения являются множествами, поэтому к ним применимы операции объединения, пересечения и разности множеств.

Определение. Пусть $R \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, $S \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$. *Объединением* (*пересечением* или *разностью*) *отношений* R и S называется отношение $R \cup S \subset A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ (соответственно $R \cap S$ или $R \setminus S$), являющееся объединением (пересечением или разностью) множеств R и S.

Пример 1. Объединением отношений «сын» и «дочь» во множестве живущих в настоящий момент людей, состоящих из всех таких пар (x, y), что x — сын y или x — дочь y соответственно, является отношение «ребенок».

Определение. Пусть $R \subset A \times B$ и $S \subset B \times C$. *Композицией отношений* R и S называется отношение $R \circ S \subset A \times C$, состоящее из пар (x, z), для которых существует элемент y множества B, такой что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in S$.

Пример 2. Рассмотрим отношения «отец» и «жена» во множестве живущих в настоящий момент людей. По определению, композиции отношений «отец» и «жена» принадлежат все такие пары (x, z), что найдется элемент y такой, что x — отец y и y — жена z, поэтому x — тесть z. Таким образом, «отец» $\circ$ «жена» = «тесть» (тесть — это и есть отец жены).

Определение. *Обратным* к отношению $R \subset A \times B$ называется отношение $R^{-1} \subset B \times A$, которое определяется следующим образом:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

Пример 3. Обратным к отношению «родитель» во множестве живущих в настоящий момент людей, является отношение «ребенок».

Пример 4. Пусть R — отношение на $\mathbf{R}^2$ вида:

$$R = \{(x, x^2) \mid x \in \mathbf{R}\}.$$

Тогда $R^{-1} = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$. Отметим, что отношение R функционально, а отношение R^{-1} нет.

4.2. Свойства отношений

Рассмотрим бинарные отношения *на множестве*, или *во множестве* A, т. е. отношения вида $R \subset A^2$ (иногда предлог «на» употребляют для всюду определенных отношений).

Если пара (x, y) принадлежит отношению R, то часто используется инфиксная запись $x\,R\,y$.

Определение. Отношение $E_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ называется *отношением равенства* на множестве A.

Определение. Отношение A^2 называется *полным отношением* на множестве A.

Определение. Отношение R на множестве A называется

– *рефлексивным*, если $(x, x) \in R$ для каждого элемента x из A;

– *иррефлексивным*, если $(x, x) \notin R$ для каждого элемента x из A;

– *симметричным*, если из условия $(x, y) \in R$ следует, что $(y, x) \in R$;

– *асимметричным*, если для любых двух элементов x и y множества A выполняется условие: либо $(x, y) \notin R$, либо $(y, x) \notin R$;

– *антисимметричным*, если из условия $(x, y) \in R$ и $(y, x) \in R$ следует, что $x = y$;

– *транзитивным*, если из условия $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$ следует, что $(x, z) \in R$.

Замечание. Если отношение обладает каким-либо из вышеперечисленных свойств, то этим же свойством обладает и обратное отношение.

Пример 5. Отношение равенства и полное отношение являются рефлексивными, симметричными и транзитивными на любом множестве A. Кроме того, отношение равенства антисимметрично.

Пример 6. Рассмотрим отношения во множестве живущих в настоящий момент людей. Имеем:

1) отношение «друг» является иррефлексивным и симметричным;
2) отношение «предок» иррефлексивно, асимметрично, антисимметрично и транзитивно;
3) отношение «живет в одном доме с» является рефлексивным, симметричным и транзитивным;
4) отношение «не старше» является рефлексивным и транзитивным.

Пример 7. Отношение, представленное на рисунке 4.1, является антисимметричным и транзитивным и не обладает никакими другими из перечисленных выше свойств.

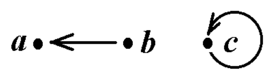

Рис. 4.1. Пример антисимметричного транзитивного отношения

4.3. Отношение эквивалентности

Определение. Рефлексивное, симметричное и транзитивное отношение на множестве называется *отношением эквивалентности*.

Для отношения эквивалентности на множестве A используются обозначения $\sim_A$ или просто $\sim$.

Пример 8. Отношение «живет в одном доме с» на множестве живущих в настоящий момент людей, рассмотренное в предыдущем примере, является отношением эквивалентности.

Пример 9. Отношение равенства и полное отношение на произвольном непустом множестве являются отношениями эквивалентности.

Пример 10. Наименьшее отношение эквивалентности, содержащее отношение из примера 7, приведено на рис. 4.2.

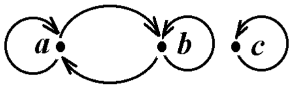

Рис. 4.2. Пример отношения эквивалентности

Определение. Если пара (x, y) принадлежит отношению эквивалентности $\sim$, то элементы x и y называются *эквивалентными*.

Определение. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A. *Классом эквивалентности* с представителем a называется множество $[a]$ всех эквивалентных a элементов:

$$[a] = \{x \mid x \sim a\}.$$

Замечание. Класс эквивалентности не зависит от выбора представителя. В самом деле, пусть элемент b принадлежит $[a]$. Покажем, что $[b] = [a]$. Если $x \in [b]$, то $x \sim b$. Но $b \sim a$, поэтому $x \sim a$ и, следовательно, $x \in [a]$. Аналогично, если $x \in [a]$, то $x \sim a$, но $a \sim b$, поэтому $x \sim b$, так что $x \in [b]$. Таким образом, $[b] = [a]$.

Утверждение 1. Классы эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.

Действительно, пусть $[a]$ и $[b]$ — классы эквивалентности и $x \in [a] \cap [b]$. Тогда $[a] = [x] = [b]$.

Следовательно, множество A по отношению $\sim$ распадается на непустые попарно не пересекающиеся классы эквивалентности.

Определение. Семейство непустых попарно не пересекающихся подмножеств множества A, объединение которых равно A, называется *разбиением* множества A.

Таким образом, семейство $\mathrm{X}_A = \{X_i \mid i \in I\}$ непустых подмножеств A образует разбиение, если $X_i \cap X_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i \in I} X_i = A$.

Заметим, что если X_A — разбиение множества A, то каждый элемент множества A принадлежит ровно одному элементу разбиения X_A.

Очевидно, что если на множестве A задано отношение эквивалентности, то его классы эквивалентности образуют разбиение множества A.

Определение. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на множестве A. Множество $A/_\sim$ его классов эквивалентности называется *фактормножеством* множества A:

$$A/_\sim = \{[a] \mid a \in A\}.$$

Теорема 1. Разбиение X_A множества A определяет единственное отношение эквивалентности $\sim$, такое что $A/_\sim = \mathrm{X}_A$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{X}_A = \{X_i \mid i \in I\}$ — разбиение множества A. Рассмотрим такое отношение $\sim$, что $x \sim y$, если x и y являются элементами одного и того же множества X_i, для некоторого i.

Покажем, что $\sim$ — отношение эквивалентности. В самом деле, отношение $\sim$ рефлексивно, так как каждый элемент множества A принадлежит какому-либо множеству из X_A.

Очевидно, что отношение $\sim$ также является симметричным.

Пусть теперь $x \sim y$ и $y \sim z$. Тогда найдутся такие множества X_i и X_j, что элементы x и y принадлежат X_i, а элементы y и z принадлежат X_j. Следовательно, $y \in X_i \cap X_j$, поэтому $X_i = X_j$. Таким образом, $x \in X_i$ и $z \in X_i$, поэтому $x \sim z$ и отношение $\sim$ транзитивно.

Итак, $\sim$ — отношение эквивалентности. Найдем фактормножество $A/_\sim$. Пусть a — произвольный элемент множества A. Тогда $a \in X_i$ для некоторого i, и $[a] = \{x \mid x \in X_i\} = X_i$. Таким образом, $A/_\sim = \mathrm{X}_A$.

Покажем, что отношение $\sim$ — единственное отношение эквивалентности, обладающее указанным свойством. Пусть R — также отношение эквивалентности, такое, что $A/_R = \mathrm{X}_A$. Тогда если $(x, y) \in R$, то элементы x и y входят в один и тот же класс эквивалентности, который в свою очередь совпадает с одним из элементов разбиения X_A. Следовательно, $x \sim y$. Обратно, если $x \sim y$, то элементы x и y принадлежат одному из множеств разбиения X_A, которое совпадает с одним из классов эквивалентности отношения R. Следовательно, пара (x, y) принадлежит отношению R. Таким образом, $R = \sim$.

Итак, между разбиениями произвольного множества и отношениями эквивалентности на нем существует взаимно однозначное соответствие.

Пример 11. Найдем число отношений эквивалентности на множестве из трех элементов. Для этого по теореме 1 достаточно найти все разбиения этого множества. Пусть $A = \{a, b, c\}$ — произвольное множество, состоящее из трех элементов. Имеем:

$$A = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\} = \{a, b\} \cup \{c\} = \{a, c\} \cup \{b\} =$$
$$= \{b, c\} \cup \{a\} = \{a, b, c\}.$$

Итак, существует пять разбиений множества A и, соответственно, пять отношений эквивалентности на A.

Пример 12. *Классы вычетов по модулю* n.

Пусть n — произвольное целое число, такое, что $n > 1$. Рассмотрим отношение ~ на множестве $\mathbf{Z}_+$ неотрицательных целых чисел, определенное следующим образом: $m \sim k$, если разность $m - k$ делится на n.

Очевидно, что разность $m - k$ делится на n тогда и только тогда, когда числа m и k имеют одинаковые остатки при делении на n.

Остаток от деления числа x на n обозначается также следующим образом: $x \ mod \ n$. Таким образом, $m \sim k$, если $(m - k) \ mod \ n = 0$, или $m \ mod \ n = k \ mod \ n$. Если m и k имеют одинаковые остатки при делении на n, то говорят, что числа m и k *сравнимы по модулю* n. Условие сравнимости по модулю n чисел m и k записывается также в виде: $m \equiv k \ (mod \ n)$.

Нетрудно показать, что ~ — отношение эквивалентности. Найдем разбиение множества $\mathbf{Z}_+$ на классы эквивалентности. Остаток от деления на n неотрицательного целого числа равен одному из чисел $0, 1, \ldots, n - 1$. Поэтому

$$\mathbf{Z}_+ /_{\sim} = \{[0], [1], \ldots, [n - 1]\}.$$

Определение. Классы эквивалентности по отношению ~ называются *классами вычетов по модулю* n.

Пример 13. Отношение ~ на множествах, такое что $A \sim B$, если множества A и B равномощны, является отношением эквивалентности.

Таким образом, множества разбиваются на классы эквивалентности. Класс эквивалентных множеств называется *мощностью* множеств данного класса.

4.4. Отношения эквивалентности и отображения

Пусть $f: A \to B$ — отображение. Тогда отношение R на множестве A, такое что $R = \{(x, y) \mid f(x) = f(y)\}$, является, как нетрудно проверить, отношением эквивалентности.

Пример 14. Пусть $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ и $f: A \to A$ — такое отображение, что $f(x) = |x|$. Тогда отношение $\sim$ такое, что $x \sim y$, если $|x| = |y|$, является отношением эквивалентности.

Имеем: $[-2] = \{x \mid |x| = 2\} = \{-2, 2\}$.

Аналогично получим: $[-1] = \{-1, 1\}$, $[0] = \{0\}$, $[3] = \{3\}$. Очевидно, что $\{-2, 2\} \cup \{-1, 1\} \cup \{0\} \cup \{3\} = A$. Таким образом, множество A разбивается на четыре класса эквивалентности.

Покажем теперь, что любое отображение можно представить в виде композиции сюръекции и инъекции.

Утверждение 2. Произвольное отображение множеств представляется в виде композиции сюръекции и инъекции.

Доказательство. Пусть $f: A \to B$ — отображение. Рассмотрим отношение эквивалентности $\sim$, такое что $x \sim y$, если $f(x) = f(y)$.

Отображение $p: A \to A/_{\sim}$, ставящее в соответствие каждому элементу x класс эквивалентности с представителем x, т. е. такое, что $p(x) = [x]$, является, очевидно, сюръекцией. Рассмотрим также отображение $[f]: A/_{\sim} \to B$, такое что $[f]([x]) = f(x)$. Легко видеть, что отображение $[f]$ — инъекция, и что его определение *корректно*, т. е. не зависит от выбора представителя класса эквивалентности.

Найдем композицию отображений $[f] \circ p: A \to B$. Имеем:

$$([f] \circ p)(x) = [f](p(x)) = [f]([x]) = f(x)$$

для произвольного элемента x множества A. Поэтому $f = [f] \circ p$.

Замечание. Отображение $[\,f\,]$ является единственным отображением из $A/{\sim}$ в B, таким, что $[\,f\,] \circ p = f$, т. е. $[\,f\,]$ — единственное отображение, делающее следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & B \\ & A/{\sim} \arrow[ur, "{[\,f\,]}"'] & \end{tikzcd}$$

Действительно, пусть $f'\colon A/{\sim} \to B$ — такое отображение, что $f' \circ p = f$. Тогда

$$f'([x]) = f'(p(x)) = f(x) = [\,f\,](p(x)) = [\,f\,]([x])$$

для любого элемента x множества A. Поэтому $f' = [\,f\,]$.

4.5. Отношение толерантности

Определение. Рефлексивное и симметричное отношения на множестве называется *отношением толерантности*.

Очевидно, что любое отношение эквивалентности является и отношением толерантности.

Пример 15. Объединение отношения «знакомый» с отношением равенства на множестве живущих в настоящий момент людей является отношением толерантности и не является отношением эквивалентности.

Определение. Семейство непустых подмножеств множества A, объединение которых равно A, называется *покрытием* множества A.

Таким образом, семейство $\{X_i \mid i \in I\}$ непустых подмножеств множества A образует покрытие, если $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = A$.

Отметим, что любое покрытие $\{X_i \mid i \in I\}$ определяет отношение толерантности R на множестве A, такое что (x, y) принадлежит отношению R, если найдется множество X_i, содержащее как элемент x, так и элемент y.

4.6. Отношение порядка

Определение. Рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношения на множестве называются *отношениями порядка* (или просто *порядком*).

Для отношений порядка обычно используется инфиксное обозначение $\leq$. Элементы x и y, такие что $x \leq y$, называются сравнимыми (относительно $\leq$).

Пример 16. Отношение равенства на множестве является отношением порядка.

Определение. Отношение порядка $\leq$ на множестве A называется отношением *линейного порядка*, если для любых элементов x и y множества A выполняется условие: $x \leq y$ или $y \leq x$.

Пример 17. Отношение «меньше или равно» на множестве натуральных чисел является отношением линейного порядка.

Определение. Порядок, не являющийся линейным, называется *частичным*.

Пример 18. Отношение делимости «|» на множестве натуральных чисел, состоящее из всех таких пар (x, y), что $x \mid y$, т. е. что y делится на x, является, как нетрудно проверить, отношением частичного порядка.

Пример 19. Пусть M — произвольное множество. Отношение включения $\subset$ является отношением частичного порядка на множестве $P(M)$ подмножеств множества M.

Определение. Иррефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношения называются отношениями *строгого порядка*.

Для строгого порядка используется обозначение $<$.

Пример 20. Отношение «больше» является отношением строгого порядка на множестве действительных чисел.

Определение. Множество с выделенным на нем отношением порядка $\leq$ называется *упорядоченным множеством*.

Для упорядоченного множества A с порядком $\leq$ используется обозначение $\langle A, \leq \rangle$.

Определение. Пусть $\langle A, \leq \rangle$ — упорядоченное множество.

Элемент a множества A называется *минимальным элементом* этого множества, если для любого элемента x множества A из условия $x \leq a$ следует, что $x = a$.

Элемент a множества A, такой что из условия $a \leq x$ следует, что $x = a$, называется *максимальным элементом* множества A.

Наименьшим элементом множества A называется такой элемент a этого множества, что условие $a \leq x$ выполняется для любого элемента x множества A.

Наибольшим элементом множества A называется такой его элемент a, что для каждого элемента x множества A выполняется условие $x \leq a$.

Элемент a *непосредственно следует* за элементом b (b *непосредственно предшествует* a), если из условия $b \leq x$ и $x \leq a$ вытекает, что $x = b$ или $x = a$.

Утверждение. Пусть $\langle A, \leq \rangle$ — упорядоченное множество. Тогда:

1) в A существует не более одного наименьшего и не более одного наибольшего элемента;
2) если в A существует наименьший (наибольший) элемент, то любой минимальный (максимальный) элемент с ним совпадает.

Доказательство. Пусть a и b — наименьшие (наибольшие) элементы. Тогда, с одной стороны, $b \leq a$, с другой — $a \leq b$. Поэтому элементы a и b совпадают.

Пусть теперь a — наименьший, а x — произвольный минимальный элемент. Тогда, так как элемент a — наименьший, $a \leq x$. Но элемент x — минимальный, поэтому $a = x$. Оставшееся утверждение проверяется аналогично.

Для изображения конечных упорядоченных множеств используются *диаграммы Хассе*. На нижней горизонтальной воображаемой прямой точками отмечаются минимальные элементы; на следующей горизонтальной прямой, расположенной выше, отмечаются непосредственно следующие за ними элементы, и т. д. На каждой последующей прямой отмечаются элементы, непосредственно следующие за элементами, отмеченными на предыдущем шаге. Непосредственно следующие друг за другом элементы соединяются отрезками.

Пример 21. Диаграмма отношения делимости на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеет вид, показанный на рис. 4.3.

В этом множестве 1 — наименьший элемент, элементы 3, 4 и 5 — максимальные. Элемент 2 непосредственно следует за 1 и непосредственно предшествует 4.

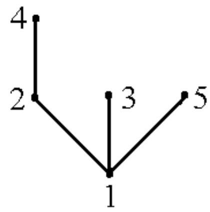

Рис. 4.3. Пример диаграммы Хассе

.

Рассмотрим примеры отношений порядка на множестве слов над некоторым алфавитом.

Определение. Пусть A — алфавит и A^* — множество слов над A. *Алгеброй слов* называется множество слов над алфавитом A, содержащее пустое слово Λ, с операцией *приписывания буквы справа*, такой, что если u — слово, а a — буква, то ua — слово, и операцией *соединения* (*конкатенации*) слов, такой, что если u и v — слова, то их соединение uv — также слово.

Таким образом, любое слово получается в результате приписывания справа к пустому слову некоторой конечной последовательности букв.

Приведем примеры отношений порядка на множестве A^* слов над алфавитом A.

Пример 22. Отношение равенства на A^* является отношением порядка.

Замечание. Отношение равенства на множестве слов A^* можно определить рекурсивным образом:

1) пустые слова равны;
2) слова ua и vb равны, если $u = v$ и $a = b$.

Пример 23. Отношение «начальный отрезок» на A^*.

Определение. Слово u — *начальный отрезок* слова v, если существует слово x такое, что $v = ux$.

Пример 24. Отношение «подслово» на A^*.

Определение. Слово u — *подслово* слова v, если существуют слова x и y такие, что $v = xuy$.

Нетрудно проверить, что каждое из приведенных отношений является отношением частичного порядка.

Приведем также важный пример линейного порядка на множестве A^* слов над алфавитом A — порядка следования слов в словаре.

Пример 25. *Лексикографический порядок*.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — алфавит, на котором задано отношение строгого порядка $<$ такое, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Тогда $u \le v$, если

1) u — начальный отрезок v или
2) найдутся слова x, y, z и буквы a_{i_1} и a_{i_2} такие, что $u = xa_{i_1}y$ и $v = xa_{i_2}z$, причем $a_{i_1} < a_{i_2}$.

Нетрудно проверить, что отношение $\le$ является отношением линейного порядка. Этот порядок называется *лексикографическим*.

4.7. Отношение предпорядка

Определение. Рефлексивное и транзитивное отношения на множестве называются *отношениями предпорядка*.

Очевидно, что как отношение эквивалентности, так и отношение порядка являются отношениями предпорядка.

Пример 26. Отношение «не выше» на множестве живущих в настоящий момент людей является отношением предпорядка и не является ни симметричным, ни антисимметричным.

Отношения предпорядка на множестве можно задавать с помощью отображений этого множества в некоторые упорядоченные множества.

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение и $\le$ — отношение порядка на B. Тогда отношение R на множестве A такое, что $(x, y) \in R$, если $f(x) \le f(y)$, является, как легко видеть, отношением предпорядка.

Заметим, что R является отношением порядка тогда и только тогда, когда f — инъекция.

Пример 27. Отношение R на множестве действительных чисел, такое что $(x, y) \in R$, если $\sin x \le \sin y$, является отношением предпорядка.

Упражнения

4.1. Найдите число рефлексивных отношений на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Сколько среди них отношений, содержащих пару (1, 2) и не содержащих пару (2, 3)?

4.2. Найдите число симметричных отношений на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Сколько среди них рефлексивных отношений?

4.3. Найдите число антисимметричных отношений на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

4.4. Найдите число транзитивных отношений на множестве $\{a, b\}$.

4.5. Является ли отношение R на множестве M

(а) отношением эквивалентности; (б) отношением порядка:

1) $M = \mathbf{N}$; $x\,R\,y$, если x делится на y;

2) M — множество людей; $x\,R\,y$, если x не выше y;

3) $M = \mathbf{Z}$; $x\,R\,y$, если $x - y$ делится на 5;

4) M — множество прямых на плоскости; $x\,R\,y$, если $x = y$ или $x \perp y$;

5) M — множество людей; $x\,R\,y$, если x предок y?

4.6. Найдите мощность фактормножества M/R, где

$$M = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

и $x\,R\,y$, если $x - y$ делится на 5.

4.7. Найдите число отношений эквивалентности на множестве $\{a, b, c, d\}$.

4.8. Найдите число отношений линейного порядка на множестве из пяти элементов.

4.9. Является ли отношение S на множестве действительных чисел

(а) отношением предпорядка; (б) отношением порядка:

1) S — это отношение «$\le$»; 2) $x\,S\,y$, если $x^3 = y^3$;

3) S — это отношение равенства; 4) $x\,S\,y$, если $x^3 \ge y^3$;

5) $x\,S\,y$, если $\cos x \le \cos y$?

4.10. Постройте отношение $S = R \circ R^{-1}$, где R — отношение на множестве людей:

1) $x\,R\,y$, если x родитель y;

2) $x\,R\,y$, если x супруг y;

3) $x\ R\ y$, если x имеет общего ребенка с y;

4) $x\ R\ y$, если x дедушка или бабушка y;

5) $x\ R\ y$, если x внук или внучка y.

4.11. Рассмотрим треугольник, состоящий из чисел Стирлинга 2-го рода (рис. 4.4). Элемент треугольника, стоящий на k-м месте в n-м ряду (нумерация рядов начинается с единицы) равен сумме его соседа с северо-востока и умноженного на k соседа с северо-запада. Смысл этого числа состоит в том, что оно совпадает с числом разбиений n–элементного множества на k непустых подмножеств (см. также [2]).

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 7 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 15 & & 25 & & 10 & & 1 & \\
1 & & 31 & & 90 & & 65 & & 15 & & 1 \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}
$$

Рис. 4.4. Треугольник чисел Стирлинга 2-го рода

Найдите с помощью данного треугольника количество отношений эквивалентности на множестве, состоящем:
(а) из пяти; (б) из n элементов.