3. Отображения

3.1. Понятие отношения

Определение. Подмножество R декартова произведения множеств $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ называется n–арным *отношением* между множествами $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

При $n = 1$ отношение называется *унарным*, при $n = 2$ — *бинарным*, при $n = 3$ — *тернарным*.

Если отношение R является подмножеством декартова квадрата A^2, то его называют отношением во множестве (на множестве) A.

Пример 1. Бинарное отношение «меньше» на множестве натуральных чисел **N** состоит из всех пар чисел (m, n), таких, что $m < n$. Тернарное отношение «сумма» состоит из всех троек натуральных чисел (m, n, k), таких, что $k = m + n$.

Пример 2. В отношение «любит» на множестве живущих в данный момент людей входят все такие пары (x, y), что x любит y.

Рассмотрим *способы задания конечных отношений*. Для задания, или описания, конечных отношений обычно используются следующие средства.

• Способы, используемые для задания множеств (перечисление и другие).

• Задание с помощью *таблиц*, в «шапке» которых указываются множества, а в столбцах находятся компоненты n–ок отношения.

Пример 3. Пусть тернарное отношение R между множествами A, B и C состоит из троек (a, b, c) и (d, e, f). Тогда его можно описать в виде следующей таблицы:

A	B	C
a	b	c
d	e	f

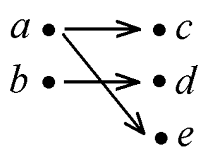
• Задание бинарных отношений с помощью *матриц*, строки которых нумеруются элементами первого множителя декартова произведения, а столбцы — элементами второго множителя. При этом если ячейка нумеруется компонентами пар, принадлежащих отношению, то в ней стоит 1, а если соответствующая ячейке пара не принадлежит отношению, то в ней ставится 0.

Пример 4. Если $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$ и $R \subset A \times B$, так что $R = \{(a, c), (a, e), (b, d)\}$, то матрица отношения R имеет следующий вид:

R	c	d	e
a	1	0	1
b	0	1	0

• Задание бинарных отношений в виде графа — с помощью точек плоскости, помеченных элементами множителей декартова произведения, и стрелок, соединяющих компоненты пар отношения: если пара (a, b) принадлежит отношению, то начало стрелки находится в точке a, а конец — в точке b.

Пример 5. Отношение R предыдущего примера можно задать следующим образом:



3.2. Понятие функции

Определение. Бинарное отношение $R \subset A \times B$ называется *всюду определенным*, если для любого элемента x множества A найдется такой элемент y множества B, что пара (x, y) принадлежит R.

Пример 6. Отношение R из примера 4 является всюду определенным.

Определение. Бинарное отношение $R \subset A \times B$ называется *функциональным*, если для любого элемента x множества A существует не более одного элемента y множества B, такого, что пара (x, y) принадлежит R.

Пример 7. Пусть $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$. Отношение R из примера 4 не является функциональным (почему?), а отношение S между множествами A и B вида $\{(a, c), (b, c)\}$ является.

Пример 8. Пусть опять $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$. Отношение $T \subset A \times B$, состоящее из одной пары (a, c), является функциональным и не является всюду определенным.

Определение. *Функцией* называется тройка $f = \langle A, B, R \rangle$, где A и B — множества, а R — функциональное отношение между ними.

Определение. Пусть $f = \langle A, B, R \rangle$ — функция.

Множество $D(f)$ элементов x множества A, для которых существует элемент y множества B, такой, что пара (x, y) принадлежит отношению R, называется *областью определения* функции f.

Множество B называется *областью значений* функции f.

Множество R называется *графиком* функции f.

Если пара (x, y) принадлежит отношению R, то используется запись: $y = f(x)$.

График функции будет обозначаться также через $\Gamma(f)$, так что

$$\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D(f)\}.$$

Образом функции f называется множество $Im\ f = \{f(x) \mid x \in D(f)\}$.

Замечание. Обычно вместо $f = \langle A, B, R \rangle$ пишут $f\colon A \to B$, при этом для каждого элемента x из $D(f)$ указывается элемент $y = f(x)$.

3.3. Понятие отображения

Определение. Пусть $f\colon A \to B$ — функция. Если область определения функции f совпадает с множеством A, то функция f называется *всюду определенной*.

Очевидно, что если функция f всюду определена, то ее график обладает свойствами всюду определенности и функциональности.

Определение. Всюду определенная функция называется *отображением*.

Очевидно, что если $f\colon A \to B$ — отображение, то для каждого элемента x множества A существует единственный элемент $f(x)$ множества B, такой, что пара $(x, f(x))$ принадлежит графику $\Gamma(f)$.

Пример 9. Функция $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такая, что $f(x) = \sin x$, является отображением.

Упражнение. Пусть $|A| = n$, $|B| = m$. Найдите количество отображений из A в B. (Ответ: m^n).

Определение. Если $f(x) = y$, то элемент y называется *образом элемента* x, а элемент x — *прообразом элемента* y при отображении $f\colon A \to B$.

Определение. Пусть $f: A \to B$ — отображение.

Множество $f^{-1}(y)$, состоящее из всех элементов x множества A, таких, что $f(x) = y$, называется *полным прообразом элемента* y при отображении f:

$$f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}.$$

Определение. *Образом множества* $X \subset A$ при отображении $f: A \to B$ называется множество

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Определение. *Прообразом множества* $Y \subset B$ при отображении $f: A \to B$ называется множество

$$f^{-1}(Y) = \{x \mid f(x) \in Y\}.$$

Пример 10. Пусть f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — отображение, $f(x) = x^2$. Тогда полным прообразом элемента 1 является множество $\{-1, 1\}$, а полный прообраз элемента (-1) пуст. Образом отрезка $[-1; 4]$ является отрезок $[0; 16]$, а прообразом отрезка $[-1; 4]$ — отрезок $[-2; 2]$ (см. рис. 3.1).

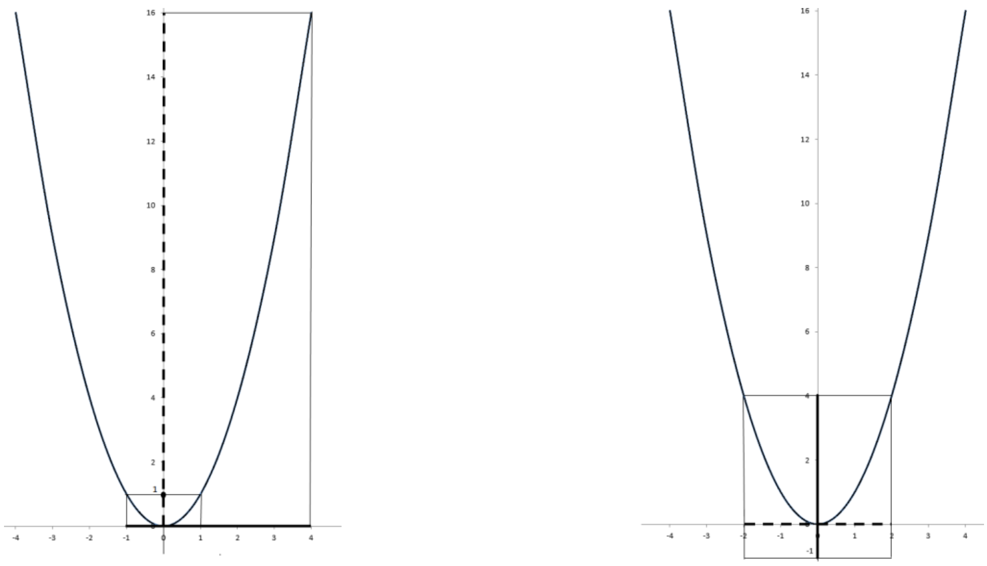


Рис. 3.1. Образ (слева) и прообраз (справа) отрезка $[-1; 4]$ при отображении $y = x^2$

Утверждение 1. Пусть f: $A \to B$ — отображение и X_1, $X_2 \subset A$. Тогда

$$f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2).$$

Доказательство. Пусть y — элемент множества $f(X_1 \cup X_2)$. По определению образа множества, существует такой элемент $x \in X_1 \cup X_2$, что $f(x) = y$. Если $x \in X_i$, то $y = f(x) \in f(X_i)$, для $i = 1, 2$. В любом случае $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Обратно, пусть $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Тогда y является элементом множества $f(X_i)$ для некоторого i. Поэтому найдется элемент $x \in X_i$, такой, что $y = f(x)$. Ясно, что $x \in X_1 \cup X_2$, поэтому $y \in f(X_1 \cup X_2)$.

Утверждение 2. Пусть f: $A \to B$ — отображение и Y_1, $Y_2 \subset B$. Тогда верно равенство:

$$f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2).$$

Доказательство. Пусть x — элемент множества $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$. По определению прообраза множества, элемент $f(x)$ принадлежит множеству $Y_1 \cup Y_2$.

Если $f(x)$ — элемент множества Y_i, то x принадлежит $f^{-1}(Y_i)$, для $i = 1, 2$. В любом случае $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$.

Обратно, пусть $x \in f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$. Тогда x является элементом множества $f^{-1}(Y_i)$ для некоторого i. Поэтому $f(x) \in Y_i$. Следовательно, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$, поэтому $x \in f^{-1}(Y_1 \cup Y_2)$.

3.4. Инъекции, сюръекции, биекции

Определение. Отображение f: $A \to B$ называется *взаимно однозначным*, если для каждого элемента y множества B существует единственный элемент x множества A, такой, что $f(x) = y$.

Замечание. Если отображение f: $A \to B$ взаимно однозначно, то $f^{-1}(B) = A$ и $f(A) = B$.

Определение. Отображение f: $A \to B$ называется *инъекцией* (инъективным, или отображением «в»), или *вложением*, если из равенства $f(x_1) = f(x_2)$ следует равенство $x_1 = x_2$ (или, что равносильно, из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$).

Пример 11. Отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, заданное формулой $f(x) = e^x$, является инъекцией (рис. 3.2 слева).

Упражнение. Пусть $|A| = n$, $|B| = m$ и $n \le m$. Найдите количество инъекций из A в B. (Ответ: A_m^n).

Определение. Отображение f: $A \to B$ называется *сюръекцией* (сюръективным, или отображением «на»), или *наложением*, если для каждого элемента y множества B существует элемент x множества A, такой что $f(x) = y$.

Пример 12. Отображение g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такое, что $g(x) = x^3 - x$, это отображение «на», но не вложение (рис. 3.2 справа).

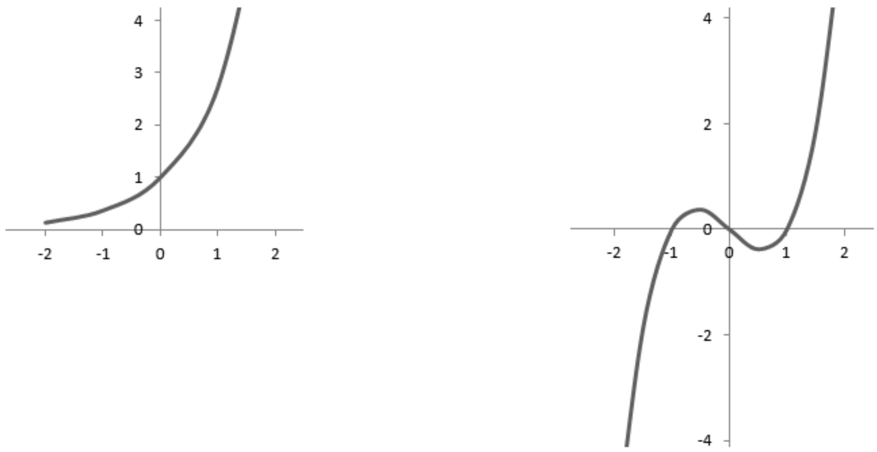


Рис. 3.2. Графики функций $y = e^x$ (слева) и $y = x^3 - x$ (справа)

Упражнение. Пусть $|A| = n$, $|B| = m$ и $n \ge m$. Найдите количество сюръекций из A в B. (Ответ: $\sum\limits_{\substack{(n_1,\ldots,n_m),\\ n_1+\ldots+n_m=n,\\ n_i\ge 1, i=1,\ldots,m}} \dfrac{n!}{n_1!\cdot\ldots\cdot n_m!}$)

Определение. Отображение f: $A \to B$ называется *биекцией* (или биективным), если оно является инъекцией и сюръекцией.

Пример 13. Отображение h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такое, что $h(x) = x^3$, является биекцией.

Упражнение. Пусть $| A | = | B | = n$. Найдите количество биекций из A в B? (Ответ: $n!$).

Утверждение 3. Отображение $f\colon A \to B$ — биекция тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.

Доказательство утверждения 3 следует из определений.

Определение. Отображения $f\colon A \to B$ и $g\colon A \to B$ называются *равными*, при этом пишут $f = g$, если для каждого элемента x множества A верно равенство $f(x) = g(x)$.

Определение. Пусть $f\colon A \to B$ и $g\colon B \to C$ — отображения. Отображение $g \circ f\colon A \to C$, такое, что $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ для $x \in A$, называется *композицией* отображений f и g:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Пример 14. Пусть $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — отображения, такие, что $f(x) = e^x$ и $g(x) = \sin x$. Тогда $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin f(x) = \sin e^x$. Аналогично, $(f \circ g)(x) = e^{\sin x}$. Очевидно, что $g \circ f \neq f \circ g$.

Утверждение 4. Операция композиции отображений ассоциативна, т. е. если $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$ и $h\colon C \to D$ — отображения, то выполняется равенство:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Доказательство. Для каждого элемента x из множества A имеем:

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))).$$

Аналогично,

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))).$$

Следовательно, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Утверждение 5. 1. Композиция инъекций является инъекцией.

2. Композиция сюръекций является сюръекцией.

Доказательство. 1. Пусть $f: A \to B$ и $g: B \to C$ — инъекции и $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$. По определению, $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$. Так как g — инъекция, то из последнего равенства следует, что $f(x_1) = f(x_2)$. Но f — также инъекция, поэтому $x_1 = x_2$. Таким образом, отображение $g \circ f$ является инъекцией.

2. Пусть $f: A \to B$ и $g: B \to C$ — сюръекции и z — элемент множества C. Так как g — сюръекция, то существует элемент y множества B, такой, что $z = g(y)$. В свою очередь так как f — сюръекция, то найдется элемент x множества A, такой, что $y = f(x)$. Таким образом, $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, и отображение $g \circ f$ является сюръекцией.

Следствие. Композиция биекций — биекция.

Определение. Отображение $1_A: A \to A$, такое, что $1_A(x) = x$, для каждого элемента x из множества A, называется *тождественным* на множестве A.

Утверждение 6. Для любого отображения $f: A \to B$ верны равенства:

$$f \circ 1_A = f \quad \text{и} \quad 1_B \circ f = f.$$

Доказательство. Имеем:

$$(f \circ 1_A)(x) = f\,(1_A(x)) = f(x) \text{ и } (1_B \circ f)(x) = 1_B(f(x)) = f(x)$$

для каждого элемента x из множества A.

Теорема 1. Пусть $f: A \to B$ и $g: B \to A$ — такие отображения, что

$$g \circ f = 1_A.$$

Тогда g — сюръекция, а f — инъекция.

Доказательство. Пусть x — элемент множества A. Возьмем элемент $y = f(x)$. Тогда $g(y) = g(f(x)) = 1_A(x) = x$. Поэтому отображение g — сюръекция.

Пусть теперь $f(x_1) = f(x_2)$. Тогда

$$x_1 = 1_A(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = 1_A(x_2) = x_2.$$

Следовательно, f — инъекция.

3.5. Обратные отображения

Определение. Отображение g: $B \to A$ называется *обратным* к отображению f: $A \to B$, если выполняются соотношения:

$$g \circ f = 1_A \quad \text{и} \quad f \circ g = 1_B.$$

Пример 15. Отображение g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такое, что $g(x) = \sqrt[3]{x}$, является обратным к отображению f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такому, что $f(x) = x^3$. Действительно, имеем:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt[3]{x^3} = x \ \text{ и } \ (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 = x$$

для любого действительного числа x.

Замечание. Обратное отображение g единственно. В самом деле, пусть g_1: $B \to A$ — такое отображение, что $g_1 \circ f = 1_A$ и $f \circ g_1 = 1_B$. Тогда

$$g_1 = g_1 \circ 1_B = g_1 \circ (f \circ g) = (g_1 \circ f) \circ g = 1_A \circ g = g.$$

Для обратного к f отображения используется обозначение f^{-1}.

Теорема 2. Пусть f: $A \to B$ и g: $B \to A$ — такие отображения, что выполняются равенства:

$$g \circ f = 1_A \text{ и } f \circ g = 1_B.$$

Тогда f и g — биекции, причем $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$.

Доказательство. По теореме 1, из равенства $g \circ f = 1_A$ следует, что g — сюръекция, а f — инъекция. В то же время, из равенства $f \circ g = 1_B$ вытекает, что g — инъекция, а f — сюръекция. Таким образом, f и g — биекции, причем, по определению обратного отображения, $g = f^{-1}$ и $f = g^{-1}$.

Теорема 3. Отображение f: $A \to B$ имеет обратное тогда и только тогда, когда оно является биекцией.

Доказательство. Пусть отображение g: $B \to A$ является обратным к f. Тогда по определению верны равенства $g \circ f = 1_A$ и $f \circ g = 1_B$. По теореме 2 из этих равенств следует, что f — биекция. Обратно, пусть f — биекция. Тогда для каждого элемента y множества B найдется единственный элемент x множества A, такой, что $f(x) = y$. Рассмотрим отображение g: $B \to A$, такое, что $g(y) = x$, где x — это такой элемент, что $f(x) = y$. Тогда $g(f(x)) = x$, для любого элемента x множества A и $f(g(y)) = y$ для любого элемента y множества B. Таким образом, отображение g является обратным к f.

Следствие. 1. Если отображение f: $A \to B$ является биекцией, то отображение f^{-1}: $B \to A$ — также биекция, причем

$$(f^{-1})^{-1} = f.$$

2. Пусть f: $A \to B$ и g: $B \to C$ — биекции. Тогда

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Доказательство. 1. Пусть f: $A \to B$ — биекция. Тогда, по теореме 3, f имеет обратное отображение f^{-1}, причем выполняются соотношения: $f^{-1} \circ f = 1_A$ и $f \circ f^{-1} = 1_B$. По теореме 2, отображение f^{-1}: $B \to A$ является биекцией, причем $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. Отображение $g \circ f$ — это композиция биекций, поэтому также является биекцией. Следовательно, для него существует обратное отображение. Имеем:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ (f^{-1} \circ g^{-1})) = g \circ ((f \circ f^{-1}) \circ g^{-1}) =$$
$$= g \circ (1_B \circ g^{-1}) = g \circ g^{-1} = 1_C.$$

Аналогично получается соотношение: $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = 1_A$. Поэтому отображение $f^{-1} \circ g^{-1}$ является обратным к отображению $g \circ f$.

3.6. Понятие мощности множеств

Определение. Множества A и B, такие что существует биекция f: $A \to B$, называются *равномощными*.

Пример 16. Множества $\{1, 2, 3\}$ и $\{a, b, c\}$ равномощны.

Пример 17. Множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ и множество натуральных четных чисел A равномощны, так как существует биекция из $\mathbf{N}$ в A. Например, отображение f: $\mathbf{N} \to A$, такое, что $f(n) = 2n$, является биекцией.

Пример 18. Отображение f: $[0; 1] \to [1; 5]$, такое, что $f(x) = 4x + 1$, является биекцией, поэтому отрезки $[0; 1]$ и $[1; 5]$ равномощны.

Определение. Множество A называется *конечным*, если оно пусто или существует биекция f: $\{1, 2, \ldots, n\} \to A$ для некоторого натурального числа n. Число n называется *мощностью* множества A.

Замечание. Равномощные конечные множества имеют одинаковое число элементов. В самом деле, если f: $A \to B$ — биекция и $|A| = n$, т. е. существует биекция g: $\{1, 2, \ldots, n\} \to A$, то $f \circ g$: $\{1, 2, \ldots, n\} \to B$ — биекция, поэтому $|B| = n$. Обратно, если $|A| = |B| = n$, т. е. существуют биекции f: $\{1, 2, \ldots, n\} \to A$ и g: $\{1, 2, \ldots, n\} \to B$, то отображение $g \circ f^{-1}$: $A \to B$ является биекцией.

Определение. Множество A, такое что существует биекция f: $\mathbf{N} \to A$ из множества натуральных чисел в множество A, называется *счетным*.

Для того чтобы установить биекцию из $\mathbf{N}$ в A достаточно указать способ нумерации элементов множества A натуральными числами.

Пример 19. Множество A целых неотрицательных степеней числа 2 счетно, так как отображение f: $\mathbf{N} \to A$, такое, что $f(n) = 2^{n-1}$, является биекцией.

Утверждение 7. Произвольное бесконечное множество содержит счетное подмножество.

Доказательство. Пусть множество A бесконечно. Тогда оно не пусто. Выберем элемент $x_1 \in A$. Множество $A \setminus \{x_1\}$ также не пусто. Возьмем элемент x_2, принадлежащий $A \setminus \{x_1\}$. Предположим, что на k–м шаге был выбран элемент x_k. Множество A бесконечно, поэтому множество $A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ не пусто, следовательно, существует принадлежащий ему элемент x_{k+1}. Таким образом, каждому натуральному n соответствует некоторый элемент x_n множества A, при этом $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. Множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$ является счетным подмножеством множества A.

3.7. Свойства счетных множеств

Утверждение 8. 1. Любое подмножество счетного множества конечно или счетно.

2. Счетное объединение конечных множеств конечно или счетно.

3. Объединение конечного числа счетных множеств — счетное множество.

4. Счетное объединение счетных множеств — счетное множество.

5. Декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно.

Доказательство. 1. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ — счетное множество и B — его непустое подмножество. Из последовательности $a_1, a_2, \ldots$ выберем все элементы, принадлежащие множеству B, сохраняя порядок элементов. Тогда $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots\}$ — конечное или счетное подмножество A.

2. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — конечные множества. Будем нумеровать элементы объединения $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ следующим образом: сначала занумеруем все элементы конечного множества A_1 (если оно не пусто), затем элементы множества $A_2 \setminus A_1$, после этого — элементы множества $A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$ и т. д. Таким образом, на n–м шаге нумеруются элементы конечного множества $A_n \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Каждый элемент множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ получит номер в результате конечного числа шагов.

3. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, \ldots\}$ — счетные множества.

Тогда верно равенство: $A \cup B = \{a_1\} \cup \{b_1\} \cup \{a_2\} \cup \{b_2\} \cup \ldots$, т. е. множество $A \cup B$ можно представить в виде счетного объединения конечных множеств. Множество $A \cup B$ не может быть конечным, так как оно содержит счетное подмножество A, поэтому по свойству 2 множество $A \cup B$ счетное. По методу математической индукции любое ненулевое конечное число счетных множеств счетно.

4. Пусть $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots\}$, $A_2 = \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots\}$, $A_3 = \{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots\}$, … — последовательность счетных множеств. Представим объединение этих множеств в виде счетного объединения конечных множеств. Имеем:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = \{a_{11}\} \cup (\{a_{12}\} \cup \{a_{21}\}) \cup (\{a_{13}\} \cup \{a_{22}\} \cup \{a_{31}\}) \cup \ldots.$$

Счетное объединение одноэлементных множеств в правой части равенства строится следующим образом. Сначала в него включаются множества, состоящие из элементов последовательности множеств с суммой индексов 2, затем — из элементов с суммой индексов 3 и так далее; таким образом, на n–м шаге в него включается n множеств, состоящих из элементов с суммой индексов $n + 1$, т. е. множество $\{a_{1n}\} \cup \{a_{2,\, n-1}\} \cup \ldots \cup \{a_{n1}\}$. По свойству 3 множество $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ — счетно.

5. Пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ и $B = \{b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ — счетные множества. Тогда элементы декартова произведения $A \times B$ можно занумеровать в соответствии с суммой индексов элементов пар. На первом шаге нумеруется пара элементов с суммой индексов 2, затем — пары элементов с суммой индексов 3, и т. д. Очевидно, что на n–м шаге нумеруются n пар с суммой индексов $n + 1$. Таким образом,

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \ldots \}.$$

Пример 20. Множество $\mathbf{Z}$ целых чисел можно представить в виде счетного объединения конечных множеств:

$$\mathbf{Z} = \{0\} \cup \{-1, 1\} \cup \{-2, 2\} \cup \ldots.$$

Поэтому множество $\mathbf{Z}$ счетное.

Упражнение. Приведите пример биекции из $\mathbf{N}$ в $\mathbf{Z}$.

Пример 21. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел — счетное. Действительно, его можно представить в виде счетного объединения счетных множеств вида $\left\{\frac{k}{n}, k \in \mathbf{Z}\right\}$, для $n = 1, 2, \ldots$.

Пример 22. Множество конечных подмножеств счетного множества счетно. В самом деле, пусть $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$ — счетное множество. Положим $A_n = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, для $n \in \mathbf{N}$. Тогда $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$. Далее, множество конечных подмножеств A можно представить в виде счетного объединения конечных множеств $P(A_1) \cup P(A_2) \cup \ldots$, где $P(A_n)$ — множество подмножеств A_n, которое является счетным.

Пример 23. Множество слов над конечным алфавитом счетно. Действительно, пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — алфавит. Обозначим через $A^{(k)}$ множество слов длины $k - 1$ над алфавитом A для $k = 1, 2, \ldots$. Тогда множество A^* всех слов над A можно представить в виде счетного объединения конечных множеств: $A^* = A^{(1)} \cup A^{(2)} \cup \ldots$. Поэтому множество A^* счетно.

3.8. Несчетные множества

Определение. Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным*.

Теорема 4. Множество действительных чисел, лежащих на отрезке [0, 1], несчетно.

Доказательство. Для доказательства теоремы используем диагональный метод Кантора. Покажем, что для любой последовательности чисел из отрезка [0, 1] найдется число, лежащее на [0, 1] и не принадлежащее этой последовательности.

Возьмем произвольную последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$, лежащих на отрезке [0, 1]. Тогда члены этой последовательности можно представить в виде:

$$\begin{gathered} x_1 = 0, a_{11}\, a_{12}\, a_{13} \ldots, \\ x_2 = 0, a_{21}\, a_{22}\, a_{23} \ldots, \\ x_3 = 0, a_{31}\, a_{32}\, a_{33} \ldots, \\ \ldots \end{gathered}$$

(в частности, 1 = 0,(9)).

Теперь, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ возьмем цифру b_n, отличную от цифр 0, 9 и a_{nn}. Тогда число $b = 0, b_1\, b_2 \ldots$ отличается от произвольного элемента x_n последовательности $x_1, x_2, \ldots$, по крайней мере в n–ом знаке после запятой. Поэтому число b не принадлежит данной последовательности.

Определение. Множества, равномощные [0, 1], называются множествами *мощности континуум*.

Теорема Кантора. Никакое множество не равномощно множеству всех своих подмножеств.

Доказательство. Пусть $P(A)$ — множество подмножеств A. Предположим, что существует биекция $f\colon A \to P(A)$. Рассмотрим множество X таких элементов x множества A, что $x \notin f(x)$. Очевидно, что множество X не пусто, так как в $P(A)$ есть пустое множество. Поскольку X — подмножество A, то $X = f(y)$ для некоторого элемента y множества A. Предположим, что $y \in f(y)$. Но $f(y) = X$, поэтому в соответствии с характеристическим свойством множества X, $y \notin f(y)$. Если же предположить, что $y \notin f(y)$, то должно выполняться условие $y \in f(y)$. В любом случае получается противоречие с предположением о существовании биекции между множествами A и $P(A)$.

Пример 24. Примером множества, не являющегося ни конечным, ни счетным и не имеющего мощности континуума, является множество всех подмножеств множества $[0, 1]$.

Утверждение 9. Если множество A бесконечно, а множество B конечно или счетно, то множество $A \cup B$ равномощно A.

Доказательство. Множество A бесконечно, поэтому у него существует счетное подмножество X. Положим $Y = A \setminus X$. Тогда $A = Y \cup X$, причем множества Y и X не пересекаются. Представим множество $A \cup B$ в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств: $A \cup B = Y \cup X \cup (B \setminus A)$. Множество $B \setminus A$ является подмножеством множества B, поэтому оно конечно или счетно. Так как множество X счетно, то множество $X \cup (B \setminus A)$ также счетно. Следовательно, множества $X \cup (B \setminus A)$ и X равномощны. Множество Y не пересекается ни с множеством X, ни с множеством $X \cup (B \setminus A)$. Поэтому множества $Y \cup X$ и $Y \cup X \cup (B \setminus A)$ также равномощны, т. е. равномощны множества A и $A \cup B$.

Утверждение 10. Если множество A несчетно, а множество B конечно или счетно, то множество $A \setminus B$ равномощно A.

Доказательство. Заметим, что множество $A \cap B$ конечно или счетно, а множество $A \setminus B$ бесконечно. Имеем: $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Следовательно, множество A можно представить в виде объединения бесконечного множества и конечного или счетного множества. По утверждению 9 множества $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ и $A \setminus B$ равномощны.

Следствие. Множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно содержит равномощное ему собственное подмножество.

Упражнение. Укажите биекцию из [0, 1] в (0, 1).

Определение. Говорят, что мощность множества A *не больше мощности* множества B, если множество A равномощно некоторому подмножеству множества B.

Замечание. Для любых множеств A и B выполнены следующие свойства.

1. Мощность множества A не больше мощности множества A.

2. Если множества A и B равномощны, то мощность множества A не больше мощности множества B.

Доказательство очевидно.

Утверждение 11. Если мощность множества A не больше мощности множества B, а мощность множества B не больше мощности множества C, то мощность множества A не больше мощности множества C.

Доказательство. Пусть $B_1 \subset B$ и $f\colon A \to B_1$ — биекция. Пусть также $C_1 \subset C$ и $g\colon B \to C_1$ — биекция. Так как $B_1 \subset B$, то, как нетрудно проверить, $C_2 = g(B_1) \subset g(B) = C_1$. Пусть $h\colon B_1 \to C_2$ — такое отображение, что $h(x) = g(x)$, для $x \in B_1$. Легко видеть, что h — биекция. Следовательно, $h \circ f\colon A \to C_2$ — также биекция, и мощность множества A не больше мощности множества C.

Приведем без доказательства еще два факта из теории множеств.

Теорема Кантора–Бернштейна. Если мощность множества A не больше мощности множества B и мощность множества B не больше мощности множества A, то множества A и B равномощны.

Теорема 5. Если A и B — произвольные множества, то мощность множества A не больше мощности множества B или мощность множества B не больше мощности множества A.

Упражнения

3.1. Найдите число бинарных отношений между множествами $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\{a, b, c\}$, содержащих пару $(1, a)$ и не содержащих пары $(2, b)$ и $(2, c)$.

3.2. Найдите число отображений f: $\{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 3, 5, 7, 9\}$, таких что $f(1) = 1$ и $f(2) \neq 1$.

3.3. Пусть f: $X \to Y$ — отображение, $A, B \subset X$. Верно ли, что:

1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$; 2) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$;

3) $f(A \setminus B) \supset f(A) \setminus f(B)$; 4) если $A \subset B$, то $f(A) \subset f(B)$;

5) если $f(A) \subset f(B)$, то $A \subset B$?

3.4. Пусть f: $X \to Y$ — отображение, $C, D \subset Y$. Верно ли, что:

1) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$;

2) $f^{-1}(C \cap D) \subset f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$;

3) $f^{-1}(C \setminus D) \supset f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$;

4) если $C \subset D$, то $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(D)$;

5) $f(f^{-1}(C)) = C$?

3.5. Верно ли, что отображение f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является
(а) инъекцией, (б) сюръекцией, (в) биекцией:

1) $f(x) = \sin x$; 2) $f(x) = x^3 - x$; 3) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

4) $f(x) = x^3 + 1$; 5) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

3.6. Найдите число инъекций f: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, таких, что $f(1) = 1$ и $f(2) \neq 2$.

3.7. Найдите число сюръекций f: $\{1, 2, 3, 4, 5\} \to \{1, 2, 3\}$, таких, что $f(1) = 1$.

3.8. Найдите обратное отображение к отображению f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такому, что:

1) $f(x) = x^3 + 1$; 2) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$; 3) $f(x) = -x^3$;

4) $f(x) = \operatorname{arctg} x$; 5) $f(x) = 2x + 5$.

3.9. Постройте биекции f: $A \to B$ и g: $B \to A$.

1) $A = \mathbf{N}$, $B = \{2n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$; 2) $A = \mathbf{N}$, $B = \{5n \mid n \in \mathbf{Z}\}$;

3) $A = [0; 1]$, $B = (0; 1)$; 4) $A = [-1; 1]$, $B = [2; 7]$;

5) $A = \mathbf{R}$, $B = (-1; 1)$; 6) $A = [1; 3]$, $B = [2; 5) \cup [7; 9]$.

3.10. Равномощны ли множества:

1) множество натуральных чисел и множество бесконечных последовательностей 0 и 1;

2) множество рациональных чисел и множество слов над конечным алфавитом;

3) множество многочленов с целыми коэффициентами и множество подмножеств множества четных натуральных чисел;

4) множество действительных чисел и множество конечных подмножеств множества рациональных чисел;

5) множество рациональных чисел и множество $(0, 1)$.

3.11. Обладает ли указанное множество мощностью континуума:

1) $[0, 1] \times [0, 1]$; 2) $\mathbf{R}$; 3) $[0, 1] \cup \mathbf{N}$;

4) множество непустых непересекающихся интервалов на прямой;

5) множество иррациональных чисел.