2. Элементы комбинаторики

2.1. Правило суммы и правило произведения

Для решения задач в комбинаторике обычно используются *правило суммы* и *правило произведения*. Правило суммы вытекает из того, что мощность двух непересекающихся конечных множеств равна сумме их мощностей. Правило произведения является следствием того, что мощность декартова произведения двух конечных множеств равна произведению их мощностей.

Если множество A содержит n элементов, то говорят, что элемент x множества A можно выбрать n способами.

Правило суммы. Если элемент a можно выбрать n способами, а элемент b — другими k способами, то выбор «либо a, либо b» можно осуществить $n + k$ способами.

Правило произведения. Если элемент a можно выбрать n способами, а после каждого такого выбора элемент b можно выбрать k способами, то выбор пары (a, b) можно осуществить $n \cdot k$ способами.

2.2. Размещения

Наборы, упорядоченные или неупорядоченные, составленные из элементов множества, с повторениями элементов или без повторений, называются *соединениями*.

Пусть A — произвольное множество и $|A| = n$.

Определение. *Размещением* из n элементов множества A по k элементам называется упорядоченный набор, состоящий из k попарно различных элементов множества A, т. е. любой элемент $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ множества A^k, такой, что $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Пример 1. Размещения из трех элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$ по два элемента имеют вид: (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2).

Утверждение 1. Число размещений из n по k для $k \leq n$ равно

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Доказательство. Число размещений из n по k равно числу способов расставить n попарно различных элементов на k местах. На первое место можно поставить любой из n элементов. После того, как стоящий на первом месте элемент выбран, на второе место можно поставить любой из $n - 1$ оставшихся элементов, и т. д. (проведите самостоятельно доказательство по методу математической индукции).

Пример 2. Пусть в соревновании участвуют 10 спортсменов. Тогда общее число возможностей распределения первых трех мест между ними равно числу размещений из 10 по 3, т. е. $10 \cdot 9 \cdot 8$ (= 720).

2.3. Размещения с повторениями

Определение. *Размещением с повторениями* из n элементов множества A по k элементам называется упорядоченный набор, состоящий из k элементов множества A, т. е. произвольный элемент множества A^k.

Пример 3. Размещения с повторениями из трех элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$ по два выглядят следующим образом: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3).

Утверждение 2. Число размещений с повторениями из n по k равно n^k.

В самом деле, найдем число способов расставить n элементов на k местах так, чтобы на разных местах могли стоять одинаковые элементы. Так как на каждое из k мест можно поставить любой из n элементов, то всего получается $\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$ расстановок.

Пример 4. Найдем количество натуральных семизначных чисел. Первую цифру в записи таких чисел можно выбрать 9 способами, а любую последующую — 10 способами. Таким образом, всего существует $9 \cdot 10^6$ семизначных чисел.

2.4. Перестановки

Определение. *Перестановкой* из n элементов множества A называется упорядоченный набор, содержащий каждый элемент множества A ровно один раз, т. е. размещение из n элементов по n элементам.

Пример 5. Перестановки из трех элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$ выглядят следующим образом:

(1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), (3, 2, 1).

Утверждение 3. Число перестановок из n элементов равно

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!.$$

Доказательство. Очевидно, что число размещений из n по n равно $n!$.

Пример 6. Очередь из 7 человек может быть образована 7! (= 5040) способами.

2.5. Сочетания

Определение. *Сочетанием* из n элементов множества A по k элементам называется k–элементное подмножество множества A.

Пример 7. Сочетания из трех элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$ по два имеют вид: $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$.

Утверждение 4. Число сочетаний из n по k для $k \le n$ равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доказательство. Заметим, что для того чтобы найти все размещения из n по k, достаточно найти все сочетания из n по k (их C_n^k), а затем из каждого сочетания построить $k!$ размещений. Таким образом, имеет место равенство $A_n^k = C_n^k \cdot k!$, из которого получаем:

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Замечание. По определению сочетания $C_0^0 = 1$. С другой стороны, должно выполняться равенство $C_0^0 = \frac{0!}{0! \cdot 0!}$. Поэтому $0! = 1$.

Очевидно, что $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$ для любого целого неотрицательного n.

Пример 8. Число способов разбить 10 человек на две группы по 5 человек равно числу сочетаний из 10 по 5, или 252.

2.6. Сочетания с повторениями

Определение. *Сочетанием с повторениями* из n элементов множества A по k элементам называется неупорядоченный набор, состоящий из k элементов множества A.

Пример 9. Сочетания с повторениями из трех элементов множества $A = \{1, 2, 3\}$ по два выглядят следующим образом: $\langle 1, 1\rangle$, $\langle 1, 2\rangle$, $\langle 1, 3\rangle$, $\langle 2, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$, $\langle 3, 3\rangle$.

Утверждение 5. Число сочетаний с повторениями из n по k равно C_{n+k-1}^{k}.

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями, содержащее k элементов. Пусть в этом соединении элемент a_j встречается k_j раз, $k_j \geq 0$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Отметим, что $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$.

Данному соединению поставим в соответствие слово, состоящее из k единиц и $(n - 1)$-го нуля, построенное следующим образом: сначала в этом слове стоит k_1 единиц, затем нуль, после этого — k_2 единиц, затем опять нуль, и так далее, в конце слова после $(n - 1)$-го нуля стоит k_n единиц. Обратно, по каждому слову, состоящему из k единиц и $(n - 1)$-го нуля, можно построить единственное сочетание с повторениями из k элементов, в которое элемент a_1 входит столько раз, сколько единиц стоит в начале слова до первого нуля, элемент a_2 — столько раз, сколько единиц стоит между первыми двумя нулями слова, и так далее.

Таким образом, число сочетаний с повторениями из n по k равно числу слов длины $n - k + 1$, состоящих из k единиц и $(n - 1)$-го нуля, которое в свою очередь равно числу способов выбрать k элементов из $n - k + 1$, т. е. C_{n+k-1}^{k}.

Пример 10. Пусть имеются карандаши 7 цветов. Тогда число различных по составу наборов, каждый из которых содержит 5 карандашей, равно числу сочетаний с повторениями из 7 по 5, или числу сочетаний из 11 по 5, т. е. 462.

2.7. Перестановки с повторениями

Определение. *Перестановкой с повторениями* из n элементов называется упорядоченный набор, состоящий из n элементов, в который n_1 раз входит элемент a_1, n_2 раз — элемент a_2, …, n_k раз — элемент a_k, при этом $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Пример 11. Перестановки с повторениями из трех элементов, в которые два раза входит элемент 1 и один раз — элемент 2, имеют вид: (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1).

Утверждение 6. Число перестановок с повторениями из n элементов, в который n_1 раз входит элемент a_1, n_2 раз — элемент a_2, …, n_k раз — элемент a_k, равно

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Доказательство. Заметим, что число способов выбрать n_1 мест из n для элемента a_1 равно $C_n^{n_1}$. Далее, число способов выбрать n_2 мест из $n - n_1$ оставшихся для элемента a_2 равно $C_{n-n_1}^{n_2}$. Продолжая рассуждение, получим:

$$P_n^{(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = C_n^{n_1}\cdot C_{n-n_1}^{n_2}\cdot\ldots\cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\cdot\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\cdot\ldots\cdot\frac{n_k!}{n_k!} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}.$$

Пример 12. В слове «кукуруза» буква «к» встречается 2 раза, буква «у» — 3 раза, а остальные буквы входят в него по одному разу. Поэтому количество различных слов, которые можно построить с помощью перестановок букв в слове «кукуруза», находится следующим образом:

$$\frac{8!}{2!\cdot 3!} = 3360.$$

2.8. Бином Ньютона

Числа сочетаний называют еще *биномиальными коэффициентами*.

Утверждение 7 (свойства биномиальных коэффициентов).

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
2. $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$, для $k \ge 1$.

Доказательство. 1. Легко видеть, что число способов выбрать k элементов из n равно числу способов выбрать $n - k$ оставшихся элементов из n. Формальное доказательство первого утверждения также очевидно:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

2. Пусть A — произвольное множество, состоящее из $(n + 1)$-го элемента, и $a \in A$. Тогда число k–элементных подмножеств, содержащих элемент a, равно C_n^{k-1} (это число равно числу способов выбора $k - 1$ элементов подмножества из n оставшихся элементов множества A), а число k–элементных подмножеств, не содержащих элемент a, равно C_n^k. Всего получается $C_n^k + C_n^{k-1}$ k–элементных подмножеств множества, состоящего из $n + 1$ элементов, что по определению равно C_{n+1}^k.

Формальное доказательство второго утверждения имеет вид:

$$\begin{aligned}
C_n^k + C_n^{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n-k+1}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k(n-k+1)} = \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k.
\end{aligned}$$

На приведенных выше свойствах биномиальных коэффициентов основано построение *треугольника Паскаля*:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Замечание. Пусть вершина треугольника Паскаля расположена на нулевой строке. Тогда сумма элементов *n*–й строки равна числу подмножеств *n*–элементного множества, поэтому верно равенство:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Отметим, что из п. 2 утверждения 7 следует, что каждый элемент треугольника Паскаля равен сумме двух ближайших к нему элементов, расположенных слева и справа от него на предыдущей строке (если какой-либо из этих элементов отсутствует, то считается, что он равен нулю). Имеем: $C_0^0 = 1$ (у пустого множества одно подмножество). Остальные элементы треугольника Паскаля вычисляются указанным методом автоматически при его последовательном построении сверху вниз:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots
\end{array}
$$

Теорема (бином Ньютона). Для любого целого неотрицательного *n* верно равенство:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k.$$

Доказательство. Заметим, что коэффициент при одночлене, содержащем множитель y^k, равен числу способов выбрать k сомножителей $(x + y)$ из n для произведения $x^{n-k}y^k$, т. е. числу C_n^k.

Для доказательства утверждения используем метод математической индукции. Очевидно, что при $n = 0$ оно верно.

Проверим, что формула верна при $n = 1$:

$$\sum_{k=0}^{1} C_1^k x^{1-k} y^k = C_1^0 x + C_1^1 y = x + y.$$

Предположим, что формула верна при $n = m$. Рассмотрим случай $n = m + 1$. Имеем:

$$(x + y)^{m+1} = (x + y)^m (x + y) = \left(\sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} y^k \right)(x + y) =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m} C_m^k x^{m-k} y^{k+1}.$$

Положим в первой сумме $k = p$, а во второй $k = p - 1$, в результате перейдем к следующему выражению:

$$\sum_{p=0}^{m} C_m^p x^{m+1-p} y^p + \sum_{p=1}^{m+1} C_m^{p-1} x^{m+1-p} y^p =$$

$$= C_m^0 x^{m+1} y^0 + \sum_{p=1}^{m} \left(C_m^p + C_m^{p-1} \right) x^{m+1-p} y^p + C_m^m x^0 y^{m+1}.$$

Используя свойства биномиальных коэффициентов, далее получим:

$$C_{m+1}^0 x^{m+1} y^0 + \sum_{p=1}^{m} C_{m+1}^p x^{m+1-p} y^p + C_{m+1}^{m+1} x^0 y^{m+1} = \sum_{p=0}^{m+1} C_{m+1}^p x^{m+1-p} y^p.$$

В соответствии с принципом математической индукции утверждение верно для любого целого неотрицательного n.

Пример 13. С помощью треугольника Паскаля сразу получается следующее разложение:

$$(x + y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5.$$

Пример 14. Найдем разложение $(x + y + z)^4$. Заметим, что коэффициент, например, при одночлене x^2yz равен числу различных слов, которые можно построить с помощью перестановок букв в слове $xxyz$, т. е. числу $\frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!}$. Обобщая рассуждение, получим равенство:

$$(x + y + z)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4 + \\ + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + 12x^2yz + 12xy^2z + 12xyz^2.$$

Замечание. Следующее разложение является обобщением формулы бинома Ньютона:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)^n = \sum_{\substack{(n_1, n_2, \ldots, n_k): \\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n, \\ n_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, k}} \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!} x_1^{n_1} \cdot x_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{n_k}.$$

Упражнения

2.1. Найдите число четырехбуквенных слов над алфавитом $\{a, b, c, d, e\}$.

2.2. Найдите число четырехбуквенных слов, содержащих букву «a», над алфавитом $\{a, b, c, d, e\}$.

2.3. Найдите число пятибуквенных слов, в которых буквы «a» и «b» стоят рядом и при этом все буквы в слове различны, над алфавитом $\{a, b, c, d, e, f, g\}$.

2.4. Сколько трехэлементных подмножеств, содержащих элемент «5», имеет множество $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$?

2.5. Сколько различных по составу букетов, содержащих по три цветка, можно составить из пяти видов цветов?

2.6. Найдите число десятизначных натуральных чисел, в записи которых используются все цифры и на третьем месте стоит цифра 7.

2.7. Сколькими способами можно распределить пять конфет «Маски» и семь конфет «Красная шапочка» по трем одинаковым пакетам так, чтобы в каждом пакете было по четыре конфеты?

2.8. Найдите число способов, которыми можно рассадить четырех мальчиков и четырех девочек за круглым столом так, чтобы каждая девочка сидела между двумя мальчиками.

2.9. Сколькими способами можно положить в ряд пять одинаковых кружочков и десять одинаковых квадратиков так, чтобы слева от каждого кружочка лежал квадратик?

2.10. Сколькими способами можно образовать очередь из пяти мальчиков и десяти девочек так, чтобы перед каждым мальчиком стояла девочка?

2.11. Сколько различных слов может получиться с помощью перестановок букв в слове «ананас»?

2.12. Сколько различных слов, содержащих буквосочетание x, может получиться с помощью перестановок букв в слове y?

1) x = пе, y = перепелка;
2) x = ку, y = кукуруза;
3) x = уу, y = кукуруза;
4) x = ко, y = колокол;
5) x = оо, y = колокол;
6) x = кол, y = колокол;
7) x = та, y = тататамка;
8) x = пе, y = пепепе;
9) x = ее, y = пепепе;
10) x = пе, y = пепепел;
11) x = пеп, y = пепепел;
12) x = пепе, y = пепепел;
13) x = ее, y = пепепел;
14) x = пепе, y = пепепепел;
15) x = пе, y = пепепепел;
16) x = пеп, y = пепепепел.
17) x = пепеп, y = пепепепел.

2.13. Найдите разложение $(x + 2y - z)^4$.

2.14. Найдите коэффициент при x^2y^2z в разложении $(x + y + z)^5$.

2.15. Найдите коэффициент при x^2y^2z в разложении $(x + y + z + 1)^5$.

2.16. Найдите коэффициент при xyz в разложении $(x + y + z + 1)^5$.

2.17. Найдите число пятизначных натуральных чисел, у которых ровно одна цифра повторяется дважды, а остальные цифры не повторяются.

2.18. Найдите число языков, состоящих из слов над алфавитом $\{a, b, c, d, e\}$ и содержащих слово «a», при этом каждое слово любого из этих языков содержит букву «a» и состоит не более чем из трех букв.

2.19. Сколько различных слов можно составить из пяти единиц и девяти нулей так, чтобы между любыми двумя единицами был хотя бы один нуль?

2.20. Сколько палиндромов длины 9 можно образовать из двух букв «a», трех букв «b» и четырех букв «c» (палиндром — это слово, которое одинаково читается слева направо и справа налево)?

2.21. Сколько палиндромов длины не более пяти можно составить из нулей и единиц?

2.22. Сколько слагаемых содержится в разложении $(x + y + z + 1)^{30}$?