7. Векторные пространства и линейные отображения

7.1. Базис и размерность векторного пространства

Пусть V — линейное векторное пространство.

Определение. Говорят, что вектор b *линейно выражается* через векторы a_1, a_2, …, a_n, если существует такой набор коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ из $\mathbf{R}$, что $b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$.

Определение. Система векторов a_1, a_2, …, a_n называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ из $\mathbf{R}$, не все из которых равны нулю, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \overline{0}$.

Пример 1. Пусть геометрические векторы a и b линейно зависимы. Тогда существуют такие числа λ и μ, не все равные нулю, что $\lambda a + \mu b = \overline{0}$. Пусть, например, $\mu \neq 0$. Тогда $b = -\dfrac{\lambda}{\mu} a$. Поэтому векторы a и b коллинеарны. Обратно, пусть векторы a и b коллинеарны, тогда $b = \lambda a$ для некоторого числа λ. Следовательно, $\lambda a - b = \overline{0}$. Коэффициент при векторе b в этом равенстве отличен от нуля, поэтому векторы a и b линейно зависимы.

Таким образом, два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Утверждение 1. 1. Система векторов a_1, a_2, …, a_n линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из этих векторов линейно выражается через остальные.

2. Система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

3. Система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

Доказательство. Докажем первое утверждение.

Пусть система векторов a_1, a_2, …, a_n линейно зависима. Тогда $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \overline{0}$ для некоторых коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых хотя бы один отличен от нуля. Пусть $\lambda_n \neq 0$, тогда

$$a_n = -\frac{\lambda_1}{\lambda_n} a_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_n} a_2 - \ldots - \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n} a_{n-1}.$$

Обратно, пусть какой-либо вектор системы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно выражается через остальные, например, пусть

$$a_n = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1}.$$

Имеем: $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_{n-1} a_{n-1} - a_n = \overline{0}$, причем коэффициент при a_n отличен от нуля. Следовательно, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима.

Второе утверждение следует из равенства

$$0a_1 + 0a_2 + \ldots + 0a_{n-1} + 1 \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Третье утверждение проверяется аналогично. Пусть подсистема векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима, т. е. верно равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k = \overline{0}$, причем $\lambda_i \neq 0$ для некоторого i, где $1 \leq i \leq k$. Тогда

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k + 0a_{k+1} + \ldots + 0a_n = \overline{0},$$

где $\lambda_i \neq 0$. Поэтому система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима.

Определение. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *линейно независимой*, если из равенства $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \overline{0}$ следует, что $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$.

Очевидно, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независима тогда и только тогда, когда никакой вектор этой системы не выражается линейно через остальные векторы.

Утверждение 2. Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независима, а система векторов $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Доказательство. По условию найдутся такие коэффициенты μ, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, не все равные нулю, что $\mu b + \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n = \overline{0}$. Предположим, что $\mu = 0$. Тогда система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима, что противоречит условию. Поэтому коэффициент μ отличен от нуля, и, следовательно, вектор b можно выразить линейно через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Определение. Линейно независимая система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *максимальной*, если для любого вектора b линейного пространства V система векторов $b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно зависима.

Определение. Произвольная максимальная линейно независимая система векторов называется *базисом* линейного пространства V.

Теорема 1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V. Тогда любой вектор a единственным образом линейно выражается через векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Доказательство. По утверждению 2 любой вектор линейного пространства линейно выражается через его базис, если этот базис существует. Проверим единственность. Пусть имеется два разложения некоторого вектора a по базису:

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n.$$

Имеем: $(x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \ldots + (x_n - y_n)e_n = \bar{0}$. Так как система $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима, то из этого равенства следует, что $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \ldots, x_n = y_n$.

Определение. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V и $a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами* вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Покажем, что все базисы линейного пространства имеют одинаковое число элементов.

Теорема (о ранге матрицы). Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V. Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из координат этих векторов, равен k.

Доказательство. Рассмотрим равенство

$$\lambda_1a_1 + \lambda_2a_2 + \ldots + \lambda_ka_k = \bar{0}.$$

Подставим в это равенство выражение векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ через базис. Имеем:

$$\begin{cases} a_1 = a_{11}e_1 + \ldots + a_{n1}e_n, \\ \quad \ldots \\ a_k = a_{1k}e_1 + \ldots + a_{nk}e_n. \end{cases}$$

Следовательно, равенство будет иметь вид:

$$(\lambda_1a_{11} + \ldots + \lambda_ka_{1k})e_1 + \ldots + (\lambda_1a_{n1} + \ldots + \lambda_ka_{nk})e_n = \bar{0}.$$

Система базисных векторов линейно независима, поэтому каждый из коэффициентов в левой части равенства равен нулю. Таким образом, получилась однородная система n линейных уравнений с неизвестными $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ вида

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + \ldots + a_{1k}\lambda_k = 0, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}\lambda_1 + \ldots + a_{nk}\lambda_k = 0. \end{cases}$$

По теореме Кронекера-Капелли эта система имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен k.

Следствие 1. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V и система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима. Тогда $k \le n$.

Следствие 2. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e_1', e_2', \ldots, e_k'$ — два базиса линейного пространства V. Тогда $n = k$.

Определение. *Размерностью* векторного пространства называется число векторов в его базисе.

Для размерности векторного пространства V используется обозначение $\dim V$.

Определение. Если размерность векторного пространства конечна, то оно называется *конечномерным*.

Пример 2. Векторное пространство $\mathbf{R}$, очевидно, одномерно и в качестве его базиса можно взять единицу, так как любой элемент x из $\mathbf{R}$ можно представить в виде $x = x \cdot 1$.

Пример 3. Векторы $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \ldots, 1)$ образуют базис пространства $\mathbf{R}^n$. В самом деле, легко проверить, что эта система векторов линейно независима. Очевидно также, что через эту систему векторов линейно выражается любой элемент $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ в виде

$$a = a_1e_1 + a_2e_2 + \ldots + a_ne_n.$$

Пример 4. Многочлены $1, x, \ldots, x^n$ образуют базис пространства многочленов степени не выше n, поэтому его размерность равна $n + 1$.

Отметим также, что существуют векторные пространства, не имеющие базиса. Например, в линейном пространстве непрерывных на некотором отрезке функций нет базиса.

7.1.1. Ортонормированные системы векторов

Пусть E — евклидово пространство.

Определение. Система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ из E называется *ортонормированной*, если выполняется условие:

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Утверждение 3. Ортонормированная система векторов евклидова пространства линейно независима.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированная система векторов. Рассмотрим равенство $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n = \overline{0}$. Умножим это равенство скалярно на вектор e_i, для $i = 1, 2, \ldots, n$. По свойствам скалярного произведения имеем:

$$\lambda_i = \lambda_i(e_i, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, e_i) = (\overline{0}, e_i) = 0,$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$, поэтому система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима.

Утверждение 4. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E. Тогда для любого вектора x верно равенство:

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i) e_i .$$

Доказательство. Пусть $x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n$. Тогда

$$(x, e_i) = (\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_n e_n, e_i) = \lambda_i$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Вектор $(x, e_i)e_i$, где e_i — вектор единичной длины, называется *проекцией вектора* x на вектор e_i.

Замечание. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E. Тогда скалярное произведение векторов x и y, таких что $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$ можно найти следующим образом:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

В самом деле, $(x, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

Теорема Грама-Шмидта. В произвольном конечномерном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — произвольный базис пространства E. Построим его ортонормированный базис.

Положим $e_1' = \frac{e_1}{|e_1|}$. Найдем вектор a_2 вида $a_2 = e_2 - \lambda e_1'$, ортогональный вектору e_1' (рис. 7.1).

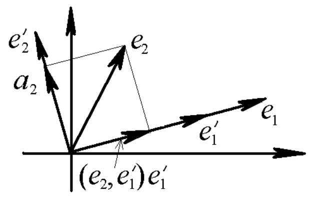

Рис. 7.1. Ортогонализация системы векторов

Имеем:

$0 = (a_2, e_1') = (e_2 - \lambda e_1', e_1') = (e_2, e_1') - \lambda(e_1', e_1') = (e_2, e_1') - \lambda$.

Поэтому $\lambda = (e_2, e_1')$. Положим $e_2' = \frac{a_2}{|a_2|}$. Далее, если уже построены векторы $e_1', e_2', \ldots, e_k'$, то вектор a_{k+1} будем искать в виде $a_{k+1} = e_{k+1} - \mu_1 e_1' - \ldots - \mu_k e_k'$. Выберем неизвестные коэффициенты так, чтобы вектор a_{k+1} был ортогонален векторам $e_1', e_2', \ldots, e_k'$. Имеем: $0 = (a_{k+1}, e_i') = (e_{k+1} - \mu_1 e_1' - \ldots - \mu_k e_k', e_i') = (e_{k+1}, e_i') - \mu_i$, для $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому $\mu_i = (e_{k+1}, e_i')$, для $i = 1, 2, \ldots, k$. Положим $e_{k+1}' = \frac{a_{k+1}}{|a_{k+1}|}$.

По построению, векторы $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ образуют ортонормированный базис пространства E.

7.2. Подпространства

Определение. Подмножество векторов V' векторного пространства V называется его *линейным подпространством*, если оно замкнуто относительно операций векторного пространства, т. е.

– если $a \in V'$ и $\lambda \in \mathbf{R}$, то $\lambda a \in V'$;

– если $a, b \in V'$, то $a + b \in V'$.

Очевидно, что $\overline{0} \in V'$ и что если $a \in V'$, то $-a \in V'$.

Таким образом, подмножество V' образует подпространство в V тогда и только тогда, когда для любых векторов $a, b \in V'$ и произвольных чисел $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ вектор $\lambda a + \mu b$ принадлежит V.

Заметим, что любое подпространство является линейным пространством, так как в нем выполняются все аксиомы линейного пространства.

Рассмотрим примеры подпространств.

Легко видеть, что любое векторное пространство обладает *нулевым подпространством* $\{\overline{0}\}$. Размерность нулевого подпространства равна нулю.

Пример 5. Множество векторов плоскости (пространства) с началом в точке O и концами, принадлежащими фиксированной прямой, проходящей через начало координат (рис. 7.2), образует подпространство линейного пространства закрепленных в начале координат векторов плоскости (пространства).

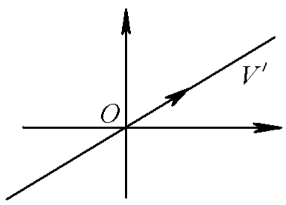

Рис. 7.2. Одномерное подпространство

Пример 6. Множество геометрических векторов плоскости (пространства), коллинеарных некоторому фиксированному вектору, является подпространством линейного пространства геометрических векторов плоскости (пространства).

Пример 7. Множество многочленов степени не выше двух образует подпространство линейного пространства многочленов.

Пример 8. Множество функций, обращающихся в нуль в левом конце отрезка $[a, b]$, образует подпространство линейного пространства непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций.

Утверждение 5. Если подмножества векторов V_i' для каждого $i \in I$ образуют линейные подпространства в V, то их пересечение $V'' = \bigcap_{i \in I} V_i'$ также является линейным подпространством в V.

Доказательство. Очевидно, что $V'' \subset V$. Далее, если векторы a и b принадлежат V'', то они принадлежат V_i' для любого $i \in I$, поэтому, так как V_i' — подпространство, то для произвольных чисел λ и μ из $\mathbf{R}$ вектор $\lambda a + \mu b$ принадлежит V_i'. Следовательно, $\lambda a + \mu b \in V''$, поэтому V'' — подпространство.

Определение. Пусть M — подмножество векторов в линейном пространстве V. Обозначим через $V(M)$ пересечение подпространств, содержащих множество M. Пространство $V(M)$ называется *подпространством, порожденным множеством* M.

Пусть M — подмножество векторов в линейном пространстве V. Обозначим через $L(M)$ множество всех *линейных комбинаций* векторов из M, т. е.

$$L(M) = \{\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \mid a_1, a_2, \ldots, a_k \in M, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}\}.$$

Утверждение 6. Пространство $V(M)$ является наименьшим линейным подпространством, содержащим множество M. Кроме того, $V(M) = L(M)$.

Доказательство. Подпространство $V(M)$ является наименьшим подпространством, содержащим M, по определению. Очевидно, что $L(M) \subset V(M)$. Покажем, что множество $L(M)$ образует подпространство в V. Пусть вектор $x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k \in M$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbf{R}$, принадлежит $L(M)$. Тогда для любого числа λ вектор $\lambda x = (\lambda\lambda_1)a_1 + (\lambda\lambda_2)a_2 + \ldots + (\lambda\lambda_k)a_k$ также принадлежит $L(M)$.

Аналогично, если векторы

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k \quad \text{и} \quad x' = \lambda_1' a_1' + \lambda_2' a_2' + \ldots + \lambda_{k'}' a_{k'}',$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1', a_2', \ldots, a_{k'}' \in M$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_{k'}' \in \mathbf{R}$, принадлежат $L(M)$, то вектор

$$x + x' = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k + \lambda_1' a_1' + \lambda_2' a_2' + \ldots + \lambda_{k'}' a_{k'}'$$

также принадлежит $L(M)$. Таким образом, $L(M)$ — подпространство, а так как $V(M)$ — наименьшее подпространство, содержащее M, то $V(M) = L(M)$.

Очевидно, что если $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис некоторого подпространства V' пространства V, то $V' = L(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\})$.

Определение. Пусть V' и V'' — линейные подпространства в векторном пространстве V. *Суммой подпространств* $V' + V''$ называется подпространство пространства V, порожденное векторами из V' и V''.

Теорема (о размерности суммы линейных подпространств). Пусть V — линейное пространство, V' и V'' — его подпространства, такие, что их сумма конечномерна. Тогда

$$\dim(V' + V'') = \dim V' + \dim V'' - \dim(V' \cap V'').$$

Доказательство. Пусть $e_1''',\ldots,e_s'''$ — базис подпространства $V' \cap V''$. Пространство $V' \cap V''$ является подпространством в V', поэтому его базис можно дополнить до базиса пространства V' (в самом деле, выберем вектор e_1' так, чтобы векторы e_1', $e_1''',\ldots,e_s'''$ были линейно независимы, и далее аналогично; этот процесс оборвется, так как подпространство V' имеет конечную размерность). Пусть $e_1',\ldots,e_r'$, $e_1''',\ldots,e_s'''$ — базис подпространства V'.

Аналогично построим базис подпространства V'' в виде $e_1'',\ldots,e_t''$, $e_1''',\ldots,e_s'''$.

Покажем, что система векторов $M = \{e_1',\ldots,e_r',\ e_1'',\ldots,e_t'',\ e_1''',\ldots,e_s'''\}$ образует базис подпространства $V' + V''$. В самом деле, так как $V' + V'' = L(M)$, то любой вектор подпространства $V' + V''$ линейно выражается через M. Предположим, что система векторов M линейно зависима. Рассмотрим равенство

$$\lambda_1 e_1' + \ldots + \lambda_r e_r' + \mu_1 e_1'' + \ldots + \mu_t e_t'' + \nu_1 e_1''' + \ldots + \nu_s e_s''' = \overline{0}.$$

Из него следует, что вектор

$$\lambda_1 e_1' + \ldots + \lambda_r e_r' = -(\mu_1 e_1'' + \ldots + \mu_t e_t'') - (\nu_1 e_1''' + \ldots + \nu_s e_s''')$$

принадлежит $V' \cap V''$, поэтому он совпадает с нулевым вектором. Таким образом, $\lambda_1 e_1' + \ldots + \lambda_r e_r' = \overline{0}$, следовательно, $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_r = 0$.

Аналогично вектор $\mu_1 e_1'' + \ldots + \mu_t e_t'' = -(\nu_1 e_1''' + \ldots + \nu_s e_s''')$ также принадлежит $V' \cap V''$, следовательно, это нулевой вектор, и $\mu_1 = 0, \ldots, \mu_t = 0$. Наконец, имеем: $\nu_1 e_1''' + \ldots + \nu_s e_s''' = \overline{0}$, откуда $\nu_1 = 0, \ldots, \nu_s = 0$. Поэтому система векторов M образует базис в $V' + V''$.

Таким образом,

$$\dim (V' + V'') = r + t + s = (r + s) + (t + s) - s = $$
$$= \dim V' + \dim V'' - \dim (V' \cap V'').$$

Определение. Пусть V' и V'' — ненулевые подпространства векторного пространства V. Если пересечение этих подпространств $V' \cap V''$ состоит только из нулевого вектора, то их сумма называется *прямой* и обозначается $V' \oplus V''$.

Утверждение 7. Пусть V' и V'' — ненулевые подпространства векторного пространства V, такие, что $V' \cap V'' = \{\bar{0}\}$. Тогда любой вектор x прямой суммы подпространств $V' \oplus V''$ можно единственным образом представить в виде $x = a + b$, где $a \in V'$, $b \in V''$.

Доказательство. Пусть $x \in V' \oplus V''$ и имеется два разложения $x = a + b = a' + b'$, где $a, a' \in V'$, $b, b' \in V''$. Тогда

$$a - a' = b' - b \in V' \cap V'',$$

поэтому $a - a' = b' - b = \bar{0}$. Следовательно, $a = a'$ и $b = b'$.

Утверждение 8. Пусть V' — ненулевое собственное подпространство векторного пространства V. Тогда в V существует такое подпространство V'', что $V = V' \oplus V''$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — базис подпространства V'. Дополним его до базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ пространства V. Положим $V'' = L(\{e_{k+1}, \ldots, e_n\})$. Тогда $V = V' \oplus V''$.

Следствие. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Тогда $V = L(\{e_1\}) \oplus L(\{e_2\}) \oplus \ldots \oplus L(\{e_n\})$.

7.2.1. Подпространства евклидова пространства

Определение. Пусть E — евклидово пространство, E' — его подпространство. *Ортогональным дополнением* $E'^{\perp}$ к подпространству E' называется множество векторов пространства E, ортогональных каждому вектору подпространства E', т. е.

$$E'^{\perp} = \{x \in E \mid (x, a) = 0, a \in E'\}.$$

Утверждение 9. Пусть E' — подпространство евклидова пространства E. Тогда $E'^{\perp}$ — также подпространство E.

Доказательство. Пусть векторы x и y принадлежат множеству $E'^{\perp}$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Тогда для каждого вектора a подпространства E'

имеем: $(\lambda x + \mu y, a) = \lambda(x, a) + \mu(y, a) = 0$, поэтому вектор $\lambda x + \mu y$ также принадлежит множеству $E'^{\perp}$.

Пример 9. Пусть E' — подпространство векторов плоскости, закрепленных в начале координат, концы которых лежат на некоторой прямой l, проходящей через начало координат. Тогда $E'^{\perp}$ — подпространство векторов с концами на прямой, перпендикулярной l (рис. 7.3).

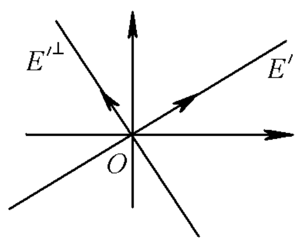

Рис. 7.3. Ортогональное дополнение к подпространству

Замечание. Подпространство $E' \cap E'^{\perp}$ состоит только из нулевого вектора.

Теорема (о разложении в прямую сумму подпространств). Пусть E' — произвольное ненулевое собственное подпространство евклидова пространства E. Тогда $E = E' \oplus E'^{\perp}$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — ортонормированный базис подпространства E'. Дополним его по методу Грама-Шмидта до ортонормированного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ всего пространства.

Покажем, что система векторов $e_{k+1}, \ldots, e_n$ образует базис ортогонального дополнения $E'^{\perp}$. В самом деле, если вектор a принадлежит $E'^{\perp}$, то он ортогонален любому вектору e_i для $i = 1, 2, \ldots, k$. Поэтому если $a = x_1e_1 + \ldots + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + \ldots + x_ne_n$, то

$$0 = (e_i, a) = (e_i, x_1e_1 + \ldots + x_ke_k + x_{k+1}e_{k+1} + \ldots + x_ne_n) = x_i,$$

для $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, $a = x_{k+1}e_{k+1} + \ldots + x_ne_n$.

Таким образом, $E = L(\{e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}) = E' \oplus E'^{\perp}$.

7.2.2 Пространство решений однородной системы линейных уравнений

Утверждение 10. Множество решений системы однородных линейных уравнений с n неизвестными образует линейное подпространство в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

— произвольная однородная система линейных уравнений и $x^\circ = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ — ее решение. Очевидно, что для любого действительного числа λ набор $\lambda x^\circ = (\lambda x_1^0, \lambda x_2^0, \ldots, \lambda x_n^0)$ также удовлетворяет каждому уравнению системы, поэтому является ее решением. Аналогично, легко видеть, что сумма любых двух решений этой системы также является ее решением.

Найдем размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений.

Теорема 2. Размерность пространства решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными равна $n - r$, где r — ранг матрицы этой системы.

Доказательство. Пусть ранг матрицы однородной системы линейных уравнений с n неизвестными равен r. Тогда эта система имеет r главных неизвестных, которые однозначно выражаются через свободные неизвестные. Пусть $x_1, \ldots, x_r$ — главные неизвестные системы и общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ x_r = c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n. \end{cases}$$

Тогда частные решения

$e_1 = (c_{1r+1}, \ldots, c_{rr+1}, 1, 0, \ldots, 0)$,

$e_2 = (c_{1r+2}, \ldots, c_{rr+2}, 0, 1, \ldots, 0)$,

…

$e_{n-r} = (c_{1n}, \ldots, c_{rn}, \quad 0, 0, \ldots, 1)$

образуют линейно независимую систему векторов, так как ранг матрицы, составленный из координат векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ равен $n - r$.

С другой стороны, любое решение $x^\circ = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ системы можно представить в виде $x^\circ = x_1^0 e_1 + x_2^0 e_2 + \ldots + x_{n-r}^0 e_{n-r}$. Таким образом, система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{n-r}$ образует базис пространства решений, и его размерность равна $n - r$.

Определение. Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется ее *фундаментальной системой решений*.

Пример 10. Найдем базис пространства решений следующей однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

По методу Гаусса имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, общее решение системы имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4, \\ x_2 = 2x_3 - 3x_4. \end{cases}$$

Частные решения $u = (1, 2, 1, 0)$ и $v = (-2, -3, 0, 1)$ образуют базис пространства решений, и любое решение x° системы можно записать в виде:

$$x^\circ = \lambda(1, 2, 1, 0) + \mu(-2, -3, 0, 1),$$

где $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$.

Мы получили, что координаты множества векторов, ортогональных векторам $a = (1, -1, 1, -1)$ и $b = (1, -2, 3, -4)$ евклидова пространства $\mathbf{R}^4$, удовлетворяют данной однородной системе линейных уравнений, поэтому система векторов u, v образует базис ортогонального дополнения $L(\{a, b\})^\perp$.

7.3. Линейные отображения векторных пространств

Определение. Пусть V и V' — линейные векторные пространства. Отображение $\varphi: V \to V'$ называется *линейным*, если оно перестановочно с операциями линейного пространства, т. е.

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a') \text{ и } \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)$$

для любых векторов a и a' пространства V и произвольного действительного числа λ.

Таким образом, отображение $\varphi: V \to V'$ линейно тогда и только тогда, когда для любых векторов a и a' пространства V и произвольных действительных чисел λ и μ выполняется условие:

$$\varphi(\lambda a + \mu a') = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(a').$$

Очевидно, что если отображение $\varphi: V \to V'$ линейно, то $\varphi(\overline{0}) = \overline{0}'$ и $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ для $a \in V$.

Определение. Линейное отображение $\varphi: V \to V$ называется *линейным оператором* пространства V.

Пример 11. Отображение $\varphi: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, такое, что

$$\varphi(x, y, z) = (x, y),$$

является линейным; φ — это проекция пространства $Oxyz$ на плоскость Oxy. В самом деле, пусть $a = (x, y, z)$ и $a' = (x_1, y_1, z_1)$. Тогда

$$\varphi(a + a') = \varphi(x + x_1, y + y_1, z + z_1) = (x + x_1, y + y_1) =$$
$$= (x, y) + (x_1, y_1) = \varphi(a) + \varphi(a')$$

и $\varphi(\lambda a) = \varphi(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x, y) = \lambda\varphi(a)$, для $\lambda \in \mathbf{R}$.

Пример 12. Отображение $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ такое, что

$$\varphi(x, y) = (x, y) + (a_0, b_0),$$

не является линейным при $(a_0, b_0) \neq \overline{0}$; φ — это параллельный перенос на вектор (a_0, b_0).

Пример 13. Отображение $\varphi: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ такое, что

$$\varphi(x, y) = (\lambda x, \mu y),$$

является линейным; φ — это растяжение вдоль координатных осей.

Пример 14. Пусть V — линейное пространство бесконечно дифференцируемых на интервале (a, b) и непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций. Отображение f: $V \to \mathbf{R}$, такое что $f(u) = \int_a^b u(t)dt$, и отображение g: $V \to V$, такое что $g(u)(t) = \frac{du(t)}{dt}$, являются линейными.

Пример 15. Пусть V — произвольное линейное пространство. Отображение φ: $V \to V$, такое, что $\varphi(a) = \overline{0}$ для $a \in V$, очевидно линейно. Тождественное отображение 1_V: $V \to V$ также является линейным оператором пространства V.

Покажем, что для произвольных векторных пространств V и V' размерности n и m соответственно любая матрица размерности $m \times n$ задает некоторое линейное отображение из V в V'.

Утверждение 11. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V, $e_1', e_2', \ldots, e_m'$ — базис линейного пространства V', A — матрица размерности $m \times n$ вида:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

и φ: $V \to V'$ — отображение, которое каждому вектору a пространства V, где $a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, ставит в соответствие вектор $\varphi(a) = y_1e_1' + y_2e_2' + \ldots + y_me_m'$ так, что координаты векторов a и $\varphi(a)$ связаны соотношениями:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Тогда отображение φ — линейно.

Доказательство. Указанные соотношения можно записать в виде $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, для $i = 1, 2, \ldots, n$, и таким образом

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j e'_i .$$

Пусть теперь $a = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $a' = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ и $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\varphi(\lambda a + \mu a') = \varphi\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda x_j + \mu x'_j) e_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\lambda x_j + \mu x'_j) e'_i =$$

$$= \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j e'_i + \mu \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j e'_i = \lambda\varphi(a) + \mu\varphi(a').$$

Покажем, что образы базисных векторов однозначно определяют линейное отображение.

Утверждение 12. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис линейного пространства V. Тогда для любых векторов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ линейного пространства V' существует единственное линейное отображение $\varphi: V \to V'$, такое что $\varphi(e_j) = b_j$, для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть a — произвольный вектор пространства V и $a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$. Рассмотрим отображение $\varphi: V \to V'$, такое что $\varphi(a) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n$. Очевидно, что φ — линейно и $\varphi(e_j) = b_j$, для $j = 1, 2, ..., n$.

Далее, пусть $\psi: V \to V'$ — такое линейное отображение, что $\psi(e_j) = b_j$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда:

$$\psi(a) = \psi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1\psi(e_1) + x_2\psi(e_2) + \ldots + x_n\psi(e_n) =$$

$$= x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots + x_nb_n = \varphi(a).$$

Пусть $\varphi: V \to V'$ — линейное отображение векторных пространств, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, а $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ — базис пространства V'. Разложим каждый из образов $\varphi(e_j)$ базисных векторов пространства V по базису пространства V'. Имеем:

$$\varphi(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \ldots + a_{mj}e'_m = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i ,$$

для $j = 1, 2, ..., n$. Матрица $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$ называется *матрицей линейного отображения* φ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$.

Если $\varphi: V \to V$ — линейный оператор и

$$\varphi(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \ldots + a_{nj}e_n,$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$, то матрица $A = (a_{ij})$ порядка n называется *матрицей линейного оператора* φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пример 16. Пусть V — линейное пространство многочленов степени не выше двух. Найдем матрицу A оператора дифференцирования φ в базисе $1, x, x^2$. Имеем: $\varphi(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$, $\varphi(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$, $\varphi(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$. Поэтому матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим связь между координатами векторов и их образов при линейном отображении.

Утверждение 13. Пусть $\varphi\colon V \to V'$ — линейное отображение и $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$ — его матрица в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ пространств V и V', соответственно. Тогда если a — вектор пространства V, такой что $a = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$, то координаты вектора $\varphi(a)$ в базисе $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$ имеют вид: $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, для $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Имеем:

$$\varphi(a) = \varphi(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \varphi(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j e'_i .$$

В силу единственности разложения вектора по базису, $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$.

7.3.1. Операции над линейными отображениями

Пусть V и V' — векторные пространства.

Определение. *Суммой линейных отображений* $\varphi\colon V \to V'$ и $\psi\colon V \to V'$ называется отображение $\varphi + \psi\colon V \to V'$, такое что

$$(\varphi + \psi)(a) = \varphi(a) + \psi(a)$$

для $a \in V$.

Определение. *Произведением линейного отображения* $\varphi\colon V \to V'$ на действительное число λ называется отображение $\lambda\varphi\colon V \to V'$, такое что $(\lambda\varphi)(a) = \lambda \cdot \varphi(a)$ для $a \in V$.

Очевидно, что отображения $\varphi + \psi$ и $\lambda\varphi$ являются линейными отображениями. Множество линейных отображений из V в V' с определенными выше операциями сложения отображений и умножения отображения на число образует, как нетрудно проверить, линейное пространство, которое называется *пространством линейных отображений* из V в V'.

Теорема 3. Композиция линейных отображений является линейным отображением.

Доказательство. Пусть V, V', V'' — векторные пространства, $\varphi\colon V \to V'$ и $\psi\colon V' \to V''$ — линейные отображения. Покажем, что отображение $\psi \circ \varphi\colon V \to V''$ линейно. Пусть a и a' — произвольные векторы пространства V и λ, $\mu \in \mathbf{R}$. Тогда

$$(\psi \circ \varphi)(\lambda a + \mu a') = \psi(\varphi(\lambda a + \mu a')) = \psi(\lambda\varphi(a) + \mu\varphi(a')) =$$
$$= \lambda\psi(\varphi(a)) + \mu\psi(\varphi(a')) = \lambda(\psi \circ \varphi)(a) + \mu(\psi \circ \varphi)(a').$$

Определение. Линейное и взаимно однозначное отображение векторных пространств называется *изоморфизмом*.

Теорема 4. Пусть $\varphi\colon V \to V'$ — изоморфизм векторных пространств. Обратное отображение $\varphi^{-1}\colon V' \to V$ также является изоморфизмом векторных пространств.

Доказательство. Отображение φ — биекция, поэтому обратное к нему отображение φ^{-1} также является биекцией. Покажем, что отображение φ^{-1} линейно. Пусть b и b' — произвольные векторы пространства V' и $\varphi^{-1}(b) = a$, $\varphi^{-1}(b') = a'$. Тогда $\varphi(a) = b$ и $\varphi(a') = b'$. Следовательно, если λ, $\mu \in \mathbf{R}$, то

$$\varphi^{-1}(\lambda b + \mu b') = \varphi^{-1}(\lambda\varphi(a) + \mu\varphi(a')) = \varphi^{-1}(\varphi(\lambda a + \mu a')) =$$
$$= \lambda a + \mu a' = \lambda\varphi^{-1}(b) + \mu\varphi^{-1}(b').$$

Теорема 5. Произвольное векторное пространство V размерности n изоморфно векторному пространству $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V. Рассмотрим отображение $\varphi\colon V \to \mathbf{R}^n$, ставящее в соответствие каждому вектору a строку его координат в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, т. е. если $a = x_1e_1 + {}$ ${}+x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, то $\varphi(a) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Легко проверить, что отображение φ линейно. Рассмотрим также отображение $\psi\colon \mathbf{R}^n \to V$, ставящее в соответствие каждому элементу $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbf{R}^n$ вектор $x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ пространства V. Очевидно, что отображение ψ также линейно. Имеем:

$$(\psi \circ \varphi)(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = \psi(\varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)) =$$
$$= \psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n,$$

поэтому $\psi \circ \varphi = 1_V$. Аналогично

$$(\varphi \circ \psi)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$
$$= \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

поэтому $\varphi \circ \psi = 1_{\mathrm{R}^n}$. Таким образом, отображение φ — биекция и, следовательно, является изоморфизмом.

Следствие. Любые два векторных пространства одинаковой размерности изоморфны.

Покажем, что верно и обратное утверждение.

Утверждение 14. Изоморфные векторные пространства имеют одинаковую размерность.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon V \to V'$ — изоморфизм и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V.

Пусть b — вектор пространства V', $\varphi^{-1}(b) = a$ и

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n.$$

Тогда

$$b = \varphi(a) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n) = x_1\varphi(e_1) + x_2\varphi(e_2) + \ldots + x_n\varphi(e_n).$$

Таким образом, любой вектор пространства V' линейно выражается через векторы $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$.

Покажем, что эта система векторов линейно независима. Рассмотрим равенство $\lambda_1\varphi(e_1) + \lambda_2\varphi(e_2) + \ldots + \lambda_n\varphi(e_n) = \overline{0}'$. Так как отображение φ линейно, то $\varphi(\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \ldots + \lambda_ne_n) = \overline{0}'$. Но отображение φ — взаимно однозначно, поэтому

$$\lambda_1e_1 + \lambda_2e_2 + \ldots + \lambda_ne_n = \overline{0}.$$

Следовательно, $\lambda_j = 0$ для $j = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, система векторов $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, …, $\varphi(e_n)$ образует базис пространства V' и $\dim V' = \dim V$.

7.4. Алгебра матриц

Пусть V — произвольное линейное пространство размерности n. Заметим, что матрица E порядка n тождественного оператора 1_V в любом базисе пространства V имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица E, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные элементы равны нулю, называется *единичной матрицей*.

Единичную матрицу записывают в виде: $E = (\delta_{ij})$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Элемент δ_{ij} называют *символом Кронекера*.

Пусть V и V' — векторные пространства размерности n и m, соответственно, и φ: $V \to V'$ — такое отображение, что $\varphi(a) = \bar{0}'$ для любого вектора a пространства V. Тогда в любых базисах пространств V и V' матрица O размерности $m \times n$ линейного отображения φ имеет вид:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица O, каждый элемент которой равен нулю, называется *нулевой матрицей*.

Пусть V и V' — векторные пространства с базисами e_1, e_2, …, e_n и e_1', e_2', …, e_m' соответственно.

Утверждение 15. Пусть $\varphi: V \to V'$ и $\psi: V \to V'$ — линейные отображения, $A = (a_{ij})_m^n$ и $B = (b_{ij})_m^n$ — их матрицы в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$. Тогда матрица C отображения $\varphi + \psi$ в тех же базисах имеет вид $C = (c_{ij})_m^n$, где $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Доказательство. Имеем:

$$(\varphi + \psi)(e_j) = \varphi(e_j) + \psi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij} + b_{ij})e'_i,$$

для $j = 1, 2, \ldots, n$. По определению матрицы линейного отображения элемент c_{ij} матрицы C отображения $\varphi + \psi$ имеет вид $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Определение. *Суммой матриц* $A = (a_{ij})_m^n$ и $B = (b_{ij})_m^n$ называется матрица $C = (c_{ij})_m^n$, такая что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Для сложения матриц используется обозначение $C = A + B$.

Утверждение 16. Пусть $\varphi: V \to V'$ — линейное отображение и $A = (a_{ij})_m^n$ — его матрица в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_m$. Тогда матрица B отображения $\lambda\varphi: V \to V'$ в тех же базисах имеет вид $B = (b_{ij})_m^n$, где $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Доказательство. Имеем: $(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) = \lambda\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij}e'_i$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому элемент b_{ij} матрицы B отображения $\lambda\varphi$ имеет вид $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Определение. *Произведением матрицы* $A = (a_{ij})_m^n$ на действительное число λ называется матрица $B = (b_{ij})_m^n$ такая, что $b_{ij} = \lambda a_{ij}$.

Умножение матрицы на число обозначается в виде $B = \lambda A$.

Разностью матриц A и B называется матрица $A - B = A + (-1)B$.

Пример 17. $2\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -4 & 9 & 0 \end{pmatrix}$.

Теорема (о матрице композиции отображений). Пусть $\varphi: V \to V'$ и $\psi: V' \to V''$ — линейные отображения, $B = (b_{ij})_n^k$ — матрица отображения φ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ пространств V и V'

соответственно и $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$ — матрица отображения ψ в базисах e'_1, e'_2, …, e'_n и $e''_1, e''_2, ..., e''_m$ пространств V' и V''. Тогда матрица C композиции отображений $\psi \circ \varphi$: $V \to V''$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_k$ и $e''_1, e''_2, ..., e''_m$ имеет вид $C = \left(c_{ij}\right)_m^k$, где $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$.

Доказательство. Имеем:

$$(\psi \circ \varphi)(e_j) = \psi(\varphi(e_j)) = \psi\left(\sum_{s=1}^{n} b_{sj} e'_s\right) = \sum_{s=1}^{n} b_{sj} \psi(e'_s) = \sum_{s=1}^{n} b_{sj} \sum_{i=1}^{m} a_{is} e''_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj} \right) e''_i,$$

для $j = 1, 2, \ldots, k$, поэтому элемент c_{ij} матрицы C отображения $\psi \circ \varphi$ имеет вид $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$.

Определение. *Произведением матриц* $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$ и $B = \left(b_{ij}\right)_n^k$ называется матрица $C = \left(c_{ij}\right)_m^k$, такая, что $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}$.

Для умножения матриц используется обозначение $C = AB$.

Итак, элемент c_{ij} матрицы AB находится как произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B:

$$c_{ij} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{nj} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что операция умножения матриц не коммутативна.

Пример 18. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тогда $AB = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, а произведение BA не определено.

Теорема 6. Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

Операция сложения матриц

1. $A + B = B + A$;

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$;

3. $A + O = A$.

Операция умножения матрицы на число

4. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

5. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

6. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

Операция умножения матриц

7. $AE = A$ и $EA = A$ (матрица E в каждом равенстве имеет соответствующую размерность);

8. $(AB)C = A(BC)$;

9. $(A + B)C = AC + BC$;

10. $A(B + C) = AB + AC$.

Здесь A, B и C — произвольные матрицы таких размерностей, что равенства имеют смысл, а λ и μ — любые действительные числа.

Доказательство. По утверждению 11 любая матрица размерности $m \times n$ задает линейное отображение из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, поэтому свойства операций над матрицами следуют из соответствующих свойств линейных отображений. Проверим некоторые свойства.

Пусть $\varphi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — линейное отображение с матрицей A. Рассмотрим свойство 3. Пусть $\psi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ — линейное отображение с нулевой матрицей, т. е. такое отображение, что $\psi(x) = \overline{0}$ для любого вектора x пространства $\mathbf{R}^n$. Тогда

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x) = \varphi(x) + \overline{0} = \varphi(x)$$

для $x \in \mathbf{R}^n$. Следовательно, $\varphi + \psi = \varphi$ и, по утверждению 15, верно равенство 3. По теореме о матрице композиции отображений свойство 7 следует из соотношений $\varphi \circ 1_{\mathrm{R}^n} = \varphi$ и $1_{\mathrm{R}^m} \circ \varphi = \varphi$, а свойство 8 — из свойства ассоциативности операции композиции отображений.

Проверим также свойство 9. Пусть $\varphi\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ — линейное отображение с матрицей C, а ψ_1 и ψ_2 — линейные отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ с матрицами A и B, соответственно. Тогда

$$(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi(x) = (\psi_1 + \psi_2)(\varphi(x)) = \psi_1(\varphi(x)) + \psi_2(\varphi(x)) =$$
$$= (\psi_1 \circ \varphi)(x) + (\psi_2 \circ \varphi)(x)$$

для $x \in \mathbf{R}^k$. Поэтому $(\psi_1 + \psi_2) \circ \varphi = \psi_1 \circ \varphi + \psi_2 \circ \varphi$, и, следовательно, верно равенство 9.

Остальные свойства проверяются аналогично.

Пусть φ: $V \to V'$ — изоморфизм векторных пространств размерности n и A, B — матрицы отображений φ и φ^{-1} соответственно в некоторых фиксированных базисах.

Из равенств $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1_{V'}$ и $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1_V$ следует, что $AB = E$ и $BA = E$.

Определение. *Обратной* к матрице A называется такая матрица B, что $AB = E$ и $BA = E$.

Для матрицы A порядка n с элементами a_{ij} найдем матрицу B с элементами b_{ij}, такую, что $AB = E$, т. е. $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = \delta_{ij}$.

По теореме о разложении определителя по «чужому» столбцу (строке) имеем: $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}A_{js} = \begin{cases} \det A, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

Пусть $\det A \neq 0$. Тогда $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} \dfrac{A_{js}}{\det A} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases}$.

Положим $b_{sj} = \dfrac{A_{js}}{\det A}$. Тогда $\sum\limits_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj} = \delta_{ij}$, следовательно, $AB = E$.

Покажем, что $BA = E$. Имеем:

$$\sum_{s=1}^{n} b_{is}a_{sj} = \sum_{s=1}^{n} \frac{A_{si}}{\det A} a_{sj} = \frac{1}{\det A} \sum_{s=1}^{n} a_{sj}A_{si} = \delta_{ij}.$$

Таким образом, матрица B с элементами b_{ij}, такими что $b_{ij} = \dfrac{A_{ji}}{\det A}$, является обратной к матрице A.

Покажем, что обратная матрица единственна. Пусть C — такая матрица, что $CA = E$. Тогда

$$C = CE = C(AB) = (CA)B = EB = B.$$

Аналогично, если D — такая матрица, что $AD = E$, то

$$D = ED = (BA)D = B(AD) = BE = B.$$

Матрица, обратная к A, обозначается A^{-1}.

Определение. Матрица, определитель которой отличен от нуля, называется *невырожденной*.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема (об обратной матрице). Для любой невырожденной матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, при этом если порядок A равен n, то для обратной матрицы верно равенство:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что верно и обратное утверждение.

Теорема 7. Определитель произведения матриц равен произведению определителей, т. е. если A и B — квадратные матрицы одного и того же порядка, то верно равенство:

$$\det AB = \det A \cdot \det B.$$

Теорема 8. Пусть A — квадратная матрица. Если для A существует обратная матрица, то ее определитель отличен от нуля.

Доказательство. Из равенства $AA^{-1} = E$ и предыдущей теоремы получим, что $\det A \cdot \det A^{-1} = \det E$. Очевидно, что $\det E = 1$. Поэтому $\det A \neq 0$, и верно равенство:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Пример 19. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и $ad - bc \neq 0$. Тогда

$$A_{11} = d,\ A_{12} = -c,\ A_{21} = -b \text{ и } A_{22} = a.$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

7.4.1. Метод Гаусса-Жордана вычисления обратной матрицы

Покажем, что произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными можно записать в некотором матричном виде.

Пусть A — матрица системы, X — столбец неизвестных и B — столбец свободных членов, т. е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда $AX = B$. Это равенство называется *матричной формой* системы линейных уравнений.

Пусть $m = n$ и $\det A \neq 0$. Тогда по теореме Крамера система уравнений имеет единственное решение. С другой стороны, умножим равенство $AX = B$ слева на матрицу A^{-1}. Имеем: $A^{-1}AX = A^{-1}B$, поэтому $X = A^{-1}B$. Следовательно, по методу Гаусса матрицу $(A \mid B)$ с помощью элементарных преобразований над ее строками можно привести к виду $(E \mid A^{-1}B)$. Поэтому $(A \mid B) \sim (E \mid A^{-1}B)$.

Для произвольной матрицы C ее j-й столбец обозначим через $C^{(j)}$. Очевидно, что $CE^{(j)} = C^{(j)}$.

Таким образом, если $B = E^{(j)}$, то $(A \mid E^{(j)}) \sim (E \mid A^{-1}E^{(j)})$, т. е. $(A \mid E^{(j)}) \sim (E \mid A^{-1(j)})$. Нетрудно заметить, что

$$(A \mid E^{(1)} \mid E^{(2)} \mid \dots \mid E^{(n)}) \sim (E \mid A^{-1\,(1)} \mid A^{-1\,(2)} \mid \dots \mid A^{-1\,(n)}).$$

Поэтому $(A \mid E) \sim (E \mid A^{-1})$.

Пример 20. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. По методу Гаусса-Жордана имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Следовательно, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вернемся к **теореме Кронекера-Капелли**. Как отмечалось выше, систему S, содержащую m линейных уравнений с n неизвестными, можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$, где X — неизвестная матрица-столбец. Заметим, что это матричное уравнение можно записать также следующим образом:

$$x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \ldots + x_nA^{(n)} = B.$$

Столбцы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$ и B являются элементами векторного пространства $\mathbf{R}^m$, поэтому система S совместна тогда и только тогда, когда вектор B линейно выражается через векторы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$, т. е. $B \in L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\})$. Очевидно, что это условие равносильно соотношению $L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\}) = L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, B\})$.

Пусть теперь $r(A) = r$ и минор, образованный первыми r столбцами и некоторыми r строками матрицы A, отличен от нуля. Покажем, что столбцы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(r)}$ образуют базис пространства $L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\})$. В самом деле, ранг однородной системы линейных уравнений $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \ldots + x_rA^{(r)} = 0$ совпадает с числом r ее неизвестных, поэтому она имеет только нулевое решение. Следовательно, столбцы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(r)}$ линейно независимы.

Пусть $A^{(j)}$ — произвольный столбец матрицы A. Ранг r однородной системы $x_1A^{(1)} + x_2A^{(2)} + \ldots + x_rA^{(r)} + x_{r+1}A^{(j)} = 0$ меньше числа ее неизвестных, поэтому она имеет ненулевое решение. Следовательно, векторы $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(r)}, A^{(j)}$ линейно зависимы. Поэтому $\dim L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\}) = r(A)$ и $\dim L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}, B\}) = r(A \mid B)$.

Таким образом, требование $B \in L(\{A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}\})$ равносильно равенству $r(A \mid B) = r(A)$.

Замечание. Пусть $\det A \neq 0$. Тогда решения матричных уравнений $AX = B$ и $YA = C$ с неизвестными матрицами X и Y имеют соответственно вид: $X = A^{-1}B$ и $Y = CA^{-1}$.

7.5. Линейные операторы

Пусть V — векторное пространство, $\varphi\colon V \to V$ — линейный оператор и A — матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства

V. Пусть $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ — другой базис пространства V. Найдем матрицу оператора φ в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$.

Вычислим координаты каждого из базисных векторов $e_1', e_2', \ldots,$ e_n' в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Пусть $e_j' = t_{1j}e_1 + t_{2j}e_2 + \ldots + t_{nj}e_n = \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i$, для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Матрица $T = (t_{ij})$ называется *матрицей перехода* от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$.

Пусть a — произвольный вектор пространства V и

$$a = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n = x_1'e_1' + x_2'e_2' + \ldots + x_n'e_n'.$$

Тогда $a = \sum_{j=1}^{n} x_j'e_j' = \sum_{j=1}^{n} x_j' \sum_{i=1}^{n} t_{ij}e_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j'\right)e_i$. Следовательно, $x_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_j'$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Положим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

Тогда связь между координатами вектора a в указанных базисах имеет вид

$$X = TX'.$$

Пример 21. Рассмотрим кривую p на плоскости, заданную уравнением $x^2 - y^2 = 2$ в системе координат с началом в точке O и базисными векторами $e_1 = (1, 0)$ и $e_2 = (0, 1)$. Рассмотрим другую систему координат. Пусть оси координат e_1' и e_2' получаются в результате поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ против часовой стрелки осей e_1 и e_2 (рис. 7.4). Найдем уравнение кривой p в новой системе координат.

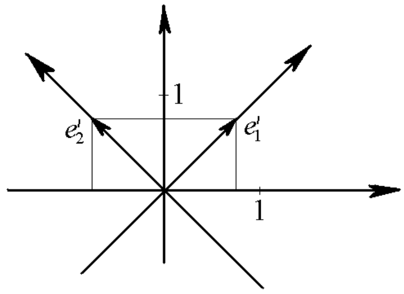

Рис. 7.4. Поворот системы координат

Имеем: $e_1' = (\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4})$, $e_2' = (-\sin\frac{\pi}{4}, \cos\frac{\pi}{4})$. Поэтому матрица перехода T записывается в виде:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, выражение старых координат через новые имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$. Подставим эти выражения в уравнение кривой p. В результате получим уравнение кривой p в новой системе координат вида $x'y' = -1$.

Теорема (о замене базиса). Пусть $\varphi: V \to V$ — линейный оператор, A — матрица оператора φ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V и $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ — также базис пространства V. Тогда матрица A' оператора φ в базисе $e_1', e_2', \ldots, e_n'$ имеет вид:

$$A' = T^{-1}AT,$$

где T - матрица перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $e_1', e_2', \ldots, e_n'$.

Доказательство. Пусть a — произвольный вектор пространства V, X и X' — столбцы координат вектора a в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и e_1', e_2', $\ldots, e_n'$, соответственно, а Y и Y' — столбцы координат вектора $\varphi(a)$ в базисах $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, соответственно. Тогда $X = TX'$ и $Y = TY'$. По утверждению 13 $Y = AX$, поэтому $TY' = ATX'$ и $Y' = T^{-1}ATX'$. Следовательно, $A' = T^{-1}AT$.

Определение. Матрицы A и A', для которых выполняется равенство $A' = T^{-1}AT$, для некоторой матрицы T, называются *подобными*.

Для подобных матриц используется обозначение $A \approx A'$.

Нетрудно проверить, что на множестве квадратных матриц отношение подобия является отношением эквивалентности.

7.5.1. Собственные векторы линейных операторов

Пусть $\varphi: V \to V$ — линейный оператор и его матрица A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Тогда $\varphi(e_1) = \lambda_1 e_1$, $\varphi(e_2) = \lambda_1 e_2$, …, $\varphi(e_n) = \lambda_n e_n$.

Определение. Матрица A, каждый элемент которой, расположенный вне главной диагонали, равен нулю, называется *диагональной* матрицей.

Таким образом, если матрица оператора в некотором базисе диагональна, то этот оператор представляет собой растяжение вдоль базисных векторов.

Определение. *Собственным вектором* линейного оператора $\varphi: V \to V$ с *собственным значением* λ называется такой ненулевой вектор a, что $\varphi(a) = \lambda a$.

Нетрудно проверить, что если a и b — собственные векторы оператора φ с собственным значением λ, то и векторы $a + b$ и μa являются собственными векторами оператора φ с собственным значением λ для $\mu \in \mathbf{R}$. Таким образом, множество собственных векторов оператора с собственным значением λ образует линейное подпространство.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис пространства V, A — матрица оператора φ и X — столбец координат вектора a в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда равенство $\varphi(a) = \lambda a$ равносильно уравнению $AX = \lambda X$, или

$$(A - \lambda E)X = O.$$

По теореме Кронекера-Капелли ненулевое решение системы линейных уравнений, соответствующей уравнению $(A - \lambda E)X = O$, существует тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$.

Уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением* матрицы A, а многочлен $\det(A - \lambda E)$ — *характеристическим многочленом* линейного оператора φ.

Покажем, что характеристический многочлен оператора не зависит от выбора базиса. Пусть A' — матрица оператора φ в некотором другом базисе и T — матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда

$$\det(A' - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T) = \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) =$$
$$= \det T^{-1} \det(A - \lambda E) \det T = \det(A - \lambda E).$$

Пример 22. Найдем собственные значения и собственные векторы линейного оператора φ, заданного в базисе (1, 0) и (0, 1) пространства $\mathbf{R}^2$ следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен оператора φ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 12\lambda + 11.$$

Поэтому оператор φ имеет два собственных значения: $\lambda_1 = 11$ и $\lambda_2 = 1$.

Найдем собственные векторы с собственным значением $\lambda_1 = 11$. Уравнение $(A - 11E)X = O$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

следовательно, $-x_1 + 3x_2 = 0$. Положим $v_1 = (3, 1)$. Аналогично, вектор $v_2 = (1, -3)$ — собственный вектор оператора φ с собственным значением $\lambda_2 = 1$. Очевидно, что векторы v_1 и v_2 линейно независимы, поэтому они образуют базис пространства $\mathbf{R}^2$. В этом базисе матрица оператора φ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема 9. Система собственных векторов с попарно различными собственными значениями линейно независима.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — собственные векторы линейного оператора $\varphi: V \to V$ с попарно различными собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, соответственно. Для доказательства используем метод математической индукции.

При $k = 1$ утверждение верно, так как по определению собственный вектор отличен от нулевого вектора. Предположим, что утверждение верно при $n = m$, и система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно независима.

Пусть система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ линейно зависима. Тогда вектор a_{m+1} линейно выражается через систему векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Имеем:

$$a_{m+1} = \mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m,$$

при этом $\mu_j \neq 0$ для некоторого j. Следовательно,

$$\varphi(a_{m+1}) = \varphi(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m) =$$

$$= \mu_1\varphi(a_1) + \mu_2\varphi(a_2) + \ldots + \mu_m\varphi(a_m) = \mu_1\lambda_1 a_1 + \mu_2\lambda_2 a_2 + \ldots + \mu_m\lambda_m a_m.$$

С другой стороны,

$$\varphi(a_{m+1}) = \lambda_{m+1} a_{m+1} = \lambda_{m+1}(\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \ldots + \mu_m a_m).$$

Таким образом, имеем:

$$\mu_1(\lambda_1 - \lambda_{m+1})a_1 + \mu_2(\lambda_2 - \lambda_{m+1})a_2 + \ldots + \mu_m(\lambda_m - \lambda_{m+1})a_m = \bar{0}.$$

По предположению индукции система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_m$ линейно независима, при этом по условию собственные значения попарно различны, поэтому $\mu_i = 0$, для $i = 1, 2, \ldots, m$, что невозможно. Таким образом, система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ линейно независима.

Замечание. Если существует базис пространства V, состоящий из собственных векторов оператора φ, то его матрица в этом базисе диагональна.

7.6. Ортогональные операторы

Пусть E — евклидово пространство.

Определение. Линейный оператор $\varphi\colon E \to E$ называется *ортогональным*, если он сохраняет скалярное произведение, т. е.

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$$

для всех векторов x и y пространства E.

Утверждение 17. Линейный оператор $\varphi\colon E \to E$ ортогональный, тогда и только тогда он сохраняет длины векторов.

Доказательство. Пусть $\varphi\colon E \to E$ — ортогональный оператор и $x \in E$. Тогда $|\,\varphi(x)\,|^2 = (\varphi(x), \varphi(x)) = (x, x) = |\,x\,|^2$, поэтому длины векторов сохраняются.

Обратно, пусть линейный оператор φ сохраняет длины векторов и $x, y \in E$. Тогда $|\,\varphi(x) - \varphi(y)\,|^2 = |\,\varphi(x - y)\,|^2 = |\,x - y\,|^2$. По определению длины вектора

$$|\,\varphi(x) - \varphi(y)\,|^2 = |\,\varphi(x)\,|^2 - 2(\varphi(x), \varphi(y)) + |\,\varphi(y)\,|^2.$$

С другой стороны, $|\,x - y\,|^2 = |\,x\,|^2 - 2(x, y) + |\,y\,|^2$. Так как длины векторов сохраняются, то $(\varphi(x), \varphi(y)) = (x, y)$, и оператор φ — ортогональный.

Следствие. Ортогональный оператор сохраняет углы между векторами.

Доказательство. Для $x, y \in E$ верно равенство

$$\frac{(\varphi(x), \varphi(y))}{|\varphi(x)||\varphi(y)|} = \frac{(x, y)}{|x||y|},$$

из которого следует доказываемое утверждение.

Легко проверить, что тождественный оператор, оператор поворота вокруг начала координат на произвольный угол и оператор отражения относительно произвольной прямой на плоскости являются ортогональными операторами.

Утверждение 18. Линейный оператор φ: $E \to E$ — ортогональный тогда и только тогда, когда он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E. Если оператор φ ортогональный, то

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (e_i, e_j) = \delta_{ij},$$

поэтому система векторов $\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)$ образует ортонормированный базис пространства E.

Обратно, пусть $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j e_j$. Тогда

$$(\varphi(x), \varphi(y)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(e_j)) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j (e_i, e_j) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = (x, y),$$

поэтому оператор φ — ортогональный.

Утверждение 19. Пусть λ — собственное значение ортогонального оператора φ: $E \to E$. Тогда $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Пусть a — собственный вектор оператора φ с собственным значением λ. Тогда

$$(a, a) = (\varphi(a), \varphi(a)) = (\lambda a, \lambda a) = \lambda^2 (a, a).$$

Так как $(a, a) \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$.

Следствие. Два собственных вектора ортогонального оператора с различными собственными значениями ортогональны.

Доказательство. Пусть a и b — собственные векторы оператора φ: $E \to E$, такие что $\varphi(a) = a$, $\varphi(b) = -b$. Тогда

$$(a, b) = (\varphi(a), \varphi(b)) = (a, -b) = -(a, b).$$

Поэтому $(a, b) = 0$.

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис евклидова пространства E и A — матрица ортогонального оператора $\varphi: E \to E$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ такая, что $A = (a_{ij})$. Имеем:

$$\delta_{ij} = (\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\sum_{s=1}^{n} a_{si} e_s, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{n} a_{si} a_{kj} (e_s, e_k) = \sum_{s,k=1}^{n} a_{si} a_{kj} \delta_{sk} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} a_{sj}.$$

Положим $b_{is} = a_{si}$. Тогда $\sum_{s=1}^{n} b_{is} a_{sj} = \delta_{ij}$. Но $(b_{is}) = A^t$. Следовательно, если A — матрица ортогонального оператора в ортонормированном базисе, то $A^t A = E$.

Определение. Матрица A, такая что $A^t A = E$, называется *ортогональной*.

Заметим, что если матрица A ортогональная, то $A^t = A^{-1}$, $AA^t = E$ и $|\det A| = 1$.

Утверждение 20. Пусть A — ортогональная матрица, $A = (a_{ij})$, и $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства E. Тогда линейный оператор $\varphi: E \to E$, заданный матрицей A в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, ортогональный.

Доказательство. Пусть $\varphi(e_j) = \sum_{s=1}^{n} a_{kj} e_k$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$(\varphi(e_i), \varphi(e_j)) = (\sum_{s=1}^{n} a_{si} e_s, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k) =$$

$$= \sum_{s,k=1}^{n} a_{si} a_{kj} (e_s, e_k) = \sum_{s,k=1}^{n} a_{si} a_{kj} \delta_{sk} = \sum_{s=1}^{n} a_{si} a_{sj} = \delta_{ij}.$$

По утверждению 18, оператор φ — ортогональный.

Утверждение 21. Матрица перехода T от ортонормированного базиса к ортонормированному базису в евклидовом пространстве E ортогональная.

Доказательство. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — ортонормированные базисы и $e'_j = \sum_{s=1}^{n} t_{kj} e_k$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\delta_{ij} = (e'_i, e'_j) = (\sum_{s=1}^{n} t_{si} e_s, \sum_{k=1}^{n} t_{kj} e_k) = \sum_{s,k=1}^{n} t_{si} t_{kj} (e_s, e_k) = \sum_{s=1}^{n} t_{si} t_{sj}.$$

Поэтому $T^t T = E$.

Рассмотрим ортогональные операторы в евклидовом пространстве E, размерность которого равна 1, 2 или 3.

Пусть φ: $E \to E$ — ортогональный оператор.

1°. Пусть $\dim E = 1$ и e — базис E. Тогда $\varphi(e) = \lambda e$, поэтому вектор e является собственным вектором оператора φ с собственным значением λ. Следовательно, произвольный вектор x из E является собственным вектором оператора φ с собственным значением λ. Оператор φ — ортогональный, поэтому $\lambda = 1$ или $\lambda = -1$. Таким образом, в одномерном евклидовом пространстве существует ровно два ортогональных оператора — тождественный оператор, задаваемый равенством $\varphi(x) = x$, и оператор отражения вида $\varphi(x) = -x$.

2°. Пусть $\dim E = 2$, e_1, e_2 — ортонормированный базис E и A — матрица оператора φ в этом базисе. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Матрица A — ортогональная, поэтому ее определитель равен 1 или -1.

Пусть $\det A = ad - bc = 1$. Имеем: $A^{-1} = A^t$. Следовательно, $d = a$, $b = -c$ и $a^2 + c^2 = 1$. Положим $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, тогда матрица A примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пусть $\det A = ad - bc = -1$, тогда $d = -a$, $b = c$ и $a^2 + c^2 = 1$. Положим $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$. Следовательно, в этом случае матрица A примет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения оператора φ. Имеем:

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \lambda^2 - 1 = 0,$$

поэтому $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Собственные векторы, отвечающими этим собственным значениям, ортогональны, поэтому существует ортонормированный базис v_1, v_2, состоящий из собственных векторов. В этом базисе матрица оператора φ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $E = \mathbf{R}^2$. Тогда если $\det A = 1$, то оператор φ — это поворот вокруг начала координат на угол α против часовой стрелки. Если $\det A = -1$, то φ — это отражение относительно прямой, заданной точкой O и вектором v_1 (рис. 7.5).

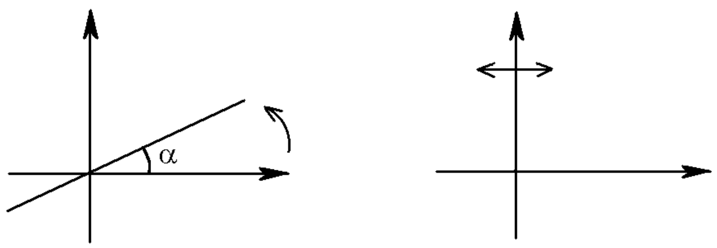

Рис. 7.5. Ортогональные преобразования плоскости

3°. Пусть $\dim E = 3$. Характеристический многочлен оператора φ является многочленом третьей степени, поэтому он имеет действительный корень λ. Пусть e_1 — собственный вектор оператора φ единичной длины с собственным значением λ.

Заметим, что если $x \perp e_1$, то $\varphi(x) \perp e_1$. В самом деле,

$$(\varphi(x), e_1) = \frac{1}{\lambda}(\varphi(x), \varphi(e_1)) = \frac{1}{\lambda}(x, e_1) = 0.$$

Поэтому, если мы дополним e_1 до ортонормированного базиса пространства E, то в этом базисе матрица A оператора φ будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}, \text{ где } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ — ортогональная матрица.}$$

Нетрудно показать, что найдется ортонормированный базис v_1, v_2, v_3, в котором матрица оператора φ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

в соответствии с условиями $\det A = 1$ или $\det A = -1$.

Пусть $E = \mathbf{R}^3$. Тогда в первом случае оператор φ — это поворот на угол α вокруг прямой, заданной точкой O и вектором v_1. Во втором случае оператор φ — это композиция поворота на угол α вокруг прямой, заданной точкой O и вектором v_1, и отражения относительно плоскости, заданной точкой O и векторами v_2 и v_3 (рис. 7.6).

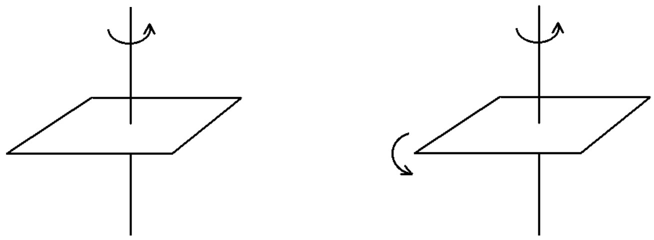

Рис. 7.6. Ортогональные преобразования пространства

7.7. Квадратичные формы

Определение. *Квадратичной формой* называется отображение $f\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ такое, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где коэффициенты a_{ij} — это действительные числа, удовлетворяющие условию: $a_{ij} = a_{ji}$.

Матрица A порядка n с элементами a_{ij} называется *матрицей квадратичной формы* f. Очевидно, что $A^t = A$.

Определение. Матрица A такая, что $A^t = A$, называется *симметрической*.

Положим:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичную форму f можно записать в виде:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^t A X.$$

Пример 23. При $n = 2$ квадратичная форма имеет вид:

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Пусть E — евклидово пространство, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — его ортонормированный базис и A — симметрическая матрица. Рассмотрим линейный оператор g: $E \to E$, заданный в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ матрицей A. Пусть $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$.

Покажем, что $(g(x), y) = (x, g(y))$. Имеем:

$$(g(x), y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i g(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) = (\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j.$$

С другой стороны,

$$(x, g(y)) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji} x_i y_j = (g(x), y).$$

Определение. Линейный оператор g: $E \to E$ такой, что

$$(g(x), y) = (x, g(y))$$

для $x, y \in E$, называется *самосопряженным оператором*.

Утверждение 22. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе является симметрической.

Доказательство. Пусть g: $E \to E$ — самосопряженный оператор и $A = (a_{ij})$ — его матрица в ортонормированном базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Тогда $(g(e_i), e_j) = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, e_j) = a_{ji}$. С другой стороны,

$$(e_i, g(e_j)) = (e_i, \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k) = a_{ij}.$$

Оператор g — самосопряженный, поэтому $a_{ji} = a_{ij}$.

Утверждение 23. Два собственных вектора самосопряженного оператора с различными собственными значениями ортогональны.

Доказательство. Пусть g: $E \to E$ — самосопряженный оператор и v_1 и v_2 — его собственные векторы с собственными значениями λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Тогда $(g(v_1), v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$. С другой стороны, $(v_1, g(v_2)) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$. Поэтому $\lambda_1(v_1, v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$, и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $(v_1, v_2) = 0$.

Покажем, что произвольную квадратичную форму f с помощью ортогонального преобразования координат можно привести к некоторому каноническому виду.

Теорема (о приведении квадратичной формы к главным осям). Пусть f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ — квадратичная форма, и

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, x_i x_j = X^t A X.$$

Тогда существует ортогональная матрица T, такая что если $X = TY$, то

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f'(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 ,$$

где λ_i — некоторые действительные числа, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Покажем, что любая симметрическая матрица A подобна некоторой диагональной матрице Λ, причем найдется ортогональная матрица T такая, что $\Lambda = T^t A T$. Рассмотрим случай, когда порядок n матрицы A равен 2 или 3.

Пусть $n = 2$. Тогда матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Найдем характеристическое уравнение матрицы A. Имеем:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2.$$

Рассмотрим уравнение $\lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = 0$. Его дискриминант D имеет вид: $D = (a - c)^2 + 4b^2$. Очевидно, что $D \geq 0$.

Если $D = 0$, то $a = c$ и $b = 0$. Поэтому матрица A имеет в этом случае диагональный вид и в качестве T можно взять единичную матрицу.

Пусть $D > 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет два различных корня λ_1 и λ_2. Рассмотрим самосопряженный оператор

g: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, заданный в базисе i, j, где $i = (1, 0)$, $j = (0, 1)$, матрицей A. Пусть v_1 и v_2 — собственные векторы единичной длины оператора g с собственными значениями λ_1 и λ_2. По утверждению 23, векторы v_1 и v_2 ортогональны, поэтому они образуют ортонормированный базис пространства $\mathbf{R}^2$. В этом базисе матрица Λ оператора g имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

По утверждению 22, матрица перехода T от ортонормированного базиса i, j к ортонормированному базису v_1, v_2 ортогональная. Следовательно, по теореме о замене базиса

$$\Lambda = T^{-1}AT = T^tAT.$$

Пусть $n = 3$. Рассмотрим самосопряженный оператор g: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, заданный матрицей A в базисе i, j, k, где $i = (1, 0, 0)$, $j = (0, 1, 0)$, $k = (0, 0, 1)$. Характеристический многочлен оператора g является многочленом третьей степени, поэтому он имеет действительный корень λ_1. Пусть e_1 — собственный вектор оператора g единичной длины с собственным значением λ_1.

Покажем, что если $x \perp e_1$, то $g(x) \perp e_1$. В самом деле,

$$(g(x), e_1) = (x, g(e_1)) = (x, \lambda_1 e_1) = \lambda_1(x, e_1) = 0.$$

Дополним e_1 до ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 пространства $\mathbf{R}^3$. Тогда в этом базисе матрица оператора g будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & c \end{pmatrix}.$$

По доказанному выше, найдется ортонормированный базис v_1, v_2, v_3 пространства $\mathbf{R}^3$, в котором матрица Λ оператора g имеет вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть T — матрица перехода от базиса i, j, k к базису v_1, v_2, v_3. Тогда T — ортогональная, поэтому $\Lambda = T^{-1}AT = T^tAT$.

Положим теперь $X = TY$. Нетрудно проверить, что

$$X^t = (TY)^t = Y^tT^t.$$

Таким образом,

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^tAX = Y^tT^tATY = Y^t\Lambda Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2 .$$

Пример 24. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(x, y) = 11x^2 + 96xy + 39y^2.$$

Матрица A формы f имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 48 \\ 48 & 39 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 48 \\ 48 & 39-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 50\lambda - 1875.$$

Поэтому характеристический многочлен матрицы A имеет корни $\lambda_1 = 75$ и $\lambda_2 = -25$. Соответствующие ортонормированные собственные векторы имеют вид $v_1 = \frac{1}{5}(3, 4)$ и $v_2 = \frac{1}{5}(-4, 3)$. Следовательно, матрица перехода T от базиса i, j к базису v_1, v_2 записывается в виде:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что матрица T задает поворот осей координат на угол $\arccos\frac{3}{5}$ против часовой стрелки. Таким образом, следующее преобразование координат

$$x = \frac{1}{5}(3x' - 4y'),\ \ y = \frac{1}{5}(4x' + 3y')$$

приводит квадратичную форму f к виду: $f'(x', y') = 75x'^2 - 25y'^2$.

Пусть квадратичная форма $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ приводится к виду $f'(x', y') = \lambda_1x'^2 + \lambda_2y'^2$. Если $\lambda_1\lambda_2 > 0$, то говорят, что форма f принадлежит к *эллиптическому типу*, если $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то к *гиперболическому типу* и если $\lambda_1\lambda_2 = 0$, то к *параболическому типу*. Очевидно, что тип квадратичной формы определяется знаком определителя ее матрицы, так как $ac - b^2 = \lambda_1\lambda_2$.

Упражнения

7.1. Образует ли множество векторов подпространство в $\mathbf{R}^3$?

1) $\{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbf{R}\}$; 2) $\{(0, 0, 0)\}$; 3) $\{(2 - x, 0, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$.

7.2. Найдите базис пространства многочленов от x с действительными коэффициентами степени не выше 3.

7.3. Укажите значение параметра a, при котором вектор $(4, 4, a)$ компланарен плоскости с направляющими векторами $(2, -1, 1)$ и $(2, 1, 3)$.

7.4. Найдите размерность наименьшего подпространства пространства $\mathbf{R}^4$, содержащего векторы $(1, -1, 2, 1)$, $(-1, 3, 1, 2)$, $(0, 2, 3, 3)$, $(-1, 5, 4, 5)$.

7.5. Образует ли набор векторов базис в пространстве многочленов с целыми коэффициентами степени не выше 3?

1) $(x-1)^2, x, x^2 - x, x^3 - x^2$; 2) $x + 1, x^2 + x, x^3 + x^2, x^3 + 1$.

7.6. Найдите базис и размерность подпространства векторов, ортогональных векторам $a = (1, 1, -1, 2, 0)$, $b = (1, 0, -1, 1, -1)$ и $c = (1, -1, -1, 0, -2)$ в $\mathbf{R}^5$.

7.7. Является ли отображение $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ линейным?

1) поворот вокруг оси Oz на 30° против часовой стрелки;

2) $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ для $x, y, z \in \mathbf{R}$;

3) сдвиг на вектор $(1, 1, 1)$.

7.8. Найдите матрицу линейного оператора $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ такого, что $f(x, y, z) = (2x + 3y, y + z, x)$, в стандартном базисе $\mathbf{R}^3$.

7.9. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.10. Является ли вектор собственным для оператора $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, такого что $f(x, y, z) = (x - y, z, y)$:

1) (2, 1, 2); 2) (1, 2, –2).

7.11. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7.12. Найдите собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.13. Найдите матрицу оператора дифференцирования в базисе 1, x, x^2 пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2.

7.14. Найдите матрицу оператора дифференцирования в базисе $x - 1$, 1, $x^2 + x$ пространства многочленов с действительными коэффициентами степени не выше 2.