6. Элементы аналитической геометрии

Для решения графических задач программными средствами необходимо владение основными понятиями и методами аналитической геометрии. Некоторые понятия аналитической геометрии, такие, как, например, понятия системы координат, вектора, скалярного произведения векторов, уравнения кривой, составляют важную часть школьного курса геометрии. В настоящем разделе понятия, известные из школьного курса, получат обобщение и дальнейшее развитие.

6.1. Векторы на плоскости и в пространстве

Основными понятиями аналитической геометрии являются понятия точки и вектора. С помощью понятия вектора моделируются многие физические величины, имеющие направление, например, сила, скорость и ускорение. Плоскость и пространство представляют собой множество точек. На этом множестве задается система координат, которая определяется точкой и двумя векторами на плоскости, или соответственно точкой и некоторыми тремя векторами в пространстве. Эта точка называется началом координат. Начало координат является началом некоторой системы отсчета. В декартовой системе координат векторы, задающие систему координат, взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Эта длина является единицей отсчета. В дальнейшем будем считать, что на плоскости или в пространстве фиксирована декартова система координат.

Определение. *Вектор* — это направленный отрезок, заданный двумя точками, первая из которых называется *началом* вектора, а вторая — его *концом* (рис 6.1).

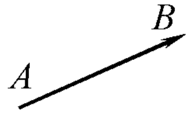

Рис. 6.1. Вектор

Определение. *Нулевым вектором* называется вектор, начало и конец которого совпадают.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается $\overline{AB}$.

Вектор $\overline{BA}$ называется *противоположным* к вектору $\overline{AB}$.

Для произвольных точек A, B и C выполняется *закон сложения векторов* (рис. 6.2):

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

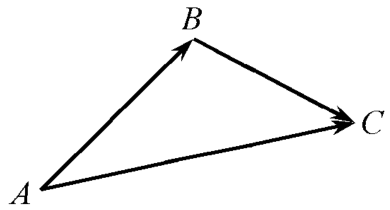

Рис. 6.2. Правило треугольника сложения векторов

Из этого закона следует, что сумма двух противоположных векторов равна нулевому вектору (для того чтобы убедиться в этом, достаточно положить $C = A$). Поэтому вектор, противоположный вектору $\overline{AB}$, обозначают также $-\overline{AB}$.

Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается в виде $|\overline{AB}|$.

Пусть O — начало координат. Вектор $\overline{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A.

6.1.1. Множество векторов, закрепленных в точке

Определение. Вектор с началом в точке A называется вектором, *закрепленным* в точке A.

Рассмотрим множество E_A векторов, закрепленных в точке A (рис. 6.3). На этом множестве определены следующие операции:

– нулевой вектор, т. е. вектор $\overline{AA}$, принадлежит E_A;

– операция взятия противоположного вектора: для каждого вектора $\overline{AB}$ противоположный ему вектор, т. е. вектор $\overline{AC}$, длина которого совпадает с длиной вектора $\overline{AB}$, а направление противоположно направлению вектора $\overline{AB}$, принадлежит E_A;

– операция умножения вектора на число: для любого вектора $\overline{AB}$ и любого действительного числа λ произведение вектора $\overline{AB}$ на число λ, т. е. такой вектор $\overline{AC}$, длина которого совпадает с произведением длины вектора $\overline{AB}$ на число $|\lambda|$, а направление совпадает с направлением вектора $\overline{AB}$, если $\lambda > 0$, и противоположно его направлению, если $\lambda < 0$, принадлежит множеству E_A;

– операция сложения векторов: для любых векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ их сумма, т. е. вектор $\overline{AD}$, которая находится по правилу параллелограмма (рис. 6.3 и 6.6), также принадлежит E_A.

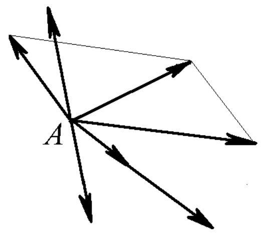

Рис. 6.3. Множество векторов, закрепленных в точке A

Определение. Два вектора называются *равными*, если они имеют одинаковые длину и направление.

6.1.2. Геометрические векторы

Легко видеть, что отношение равенства векторов является отношением эквивалентности. *Геометрическим* вектором, или *свободным* вектором, называется класс эквивалентности закрепленных векторов. Длиной геометрического вектора называется длина любого представителя его класса эквивалентности, а направлением соответственно направление этого представителя.

Свободные векторы, как правило, будут обозначаться малыми буквами латинского алфавита: a, b, c, и т. д. Нулевой вектор обозначается через $\overline{0}$. Вектор, противоположный вектору a, обозначается через $(-a)$.

Направление вектора $-a$ называется *противоположным* направлению вектора a. Длина вектора a обозначается $|a|$. В дальнейшем геометрические векторы будут называться просто векторами.

Для любой точки A и любого вектора a найдется единственная точка B, такая что $\overline{AB} = a$. В самом деле, если бы существовала еще одна такая точка, скажем, точка C такая, что $\overline{AC} = a$, то мы бы получили $\overline{0} = \overline{AB} - \overline{AC} = \overline{CB}$, откуда $B = C$. Таким образом, любой вектор может быть отложен от произвольной точки.

Определение. Векторы, имеющие одинаковое или противоположное направление, называются *коллинеарными*.

Операции над векторами определяются с помощью операций над закрепленными векторами — представителями соответствующих классов эквивалентности

Таким образом, для множества E геометрических векторов имеем:

– нулевой вектор $\bar{0}$ принадлежит E;

– если a — вектор, то $(-a)$ — вектор, который имеет противоположное к вектору a направление и ту же длину (рис. 6.4);

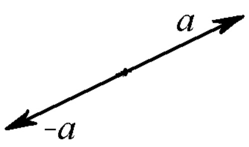

Рис. 6.4. Противоположные векторы

– если a — вектор и λ — произвольное действительное число, то произведение λa вектора a на число λ — это вектор, длина которого равна $| a || \lambda |$, а направление совпадает с направлением вектора a, если $\lambda > 0$, и противоположно направлению a, если $\lambda < 0$ (если $\lambda = 0$, то вектор λa — нулевой);

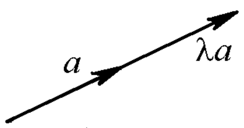

Рис. 6.5. Коллинеарные векторы

– если a и b векторы, то их сумма $a + b$ — вектор, который находится по правилу параллелограмма в случае, если эти векторы отложить от одной и той же точки (рис. 6.6), или по правилу треугольника, если начало одного из векторов совместить с концом другого (рис. 6.2).

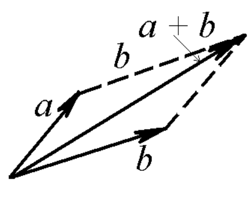

Рис. 6.6. Правило параллелограмма сложения векторов

В п. 6.2. будет обобщено понятие пространства геометрических векторов, которое изучалось в школьном курсе геометрии.

6.2. Векторное пространство

Определение. *Линейным векторным пространством* над **R**, где **R** — множество действительных чисел (или произвольное поле), называется множество V, элементы которого называются *векторами*. Для множества V:

- Существует *нулевой* вектор: $\overline{0} \in V$;
- для каждого вектора имеется противоположный вектор: $- : V \to V$;
- определена операция умножения вектора на действительное число (или на элемент поля **R**): $: \mathbf{R} \times V \to V$;
- определена операция сложения векторов, $+ : V \times V \to V$,

так что выполняются следующие свойства:

1°. $\overline{0} + a = a$;

2°. $a + b = b + a$;

3°. $(a + b) + c = a + (b + c)$;

4°. $a + (-a) = \overline{0}$;

5°. $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$;

6°. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$;

7°. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;

8°. $1 \cdot a = a$,

для любых векторов a, b и c и произвольных элементов λ и μ из **R**.

Линейные векторные пространства называют также просто векторными пространствами или просто линейными пространствами.

Приведем примеры векторных пространств.

Пример 1. Множество действительных чисел **R** с обычными операциями сложения и умножения является векторным пространством над **R**. Нулевым вектором является 0, а вектором, обратным к x, число $(-x)$.

Пример 2. Множество E_A векторов плоскости (пространства), закрепленных в точке A с операциями, определенными выше, образует векторное пространство (рис. 6.3).

Пример 3. Множество геометрических векторов плоскости (пространства) с определенными выше операциями сложения векторов и умножения вектора на действительное число (рис. 6.4–6.6) образует векторное пространство.

Пример 4. Множество непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций с операциями сложения функций и умножения функции на действительное число является векторным пространством. Действительно, если функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, то и функции

$$y = (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{и} \quad y = (\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x),$$

где $\lambda \in \mathbf{R}$, непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Пример 5. Множество многочленов с операциями сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число является векторным пространством.

Пример 6 (основной пример векторного пространства) – **арифметическое пространство $\mathbf{R}^n$**. Элементами пространства $\mathbf{R}^n$ являются упорядоченные наборы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ действительных чисел.

Суммой векторов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется вектор $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$. Произведением вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на произвольное действительное число λ называется вектор $\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$.

Нулевой вектор имеет вид $\overline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$. Обратным вектору $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является вектор $-x = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Утверждение 1. Операции векторного пространства обладают следующими свойствами:

1) если $a + b = a$, то $b = \overline{0}$ (единственность нулевого вектора);

2) если $a + b = \overline{0}$, то $b = -a$ (единственность обратного вектора);

3) $0 \cdot a = \overline{0}$;

4) $(-1) \cdot a = -a$

для произвольных векторов a и b.

Доказательство. 1) Пусть $a + b = a$. Тогда

$$b = \overline{0} + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + a = \overline{0}.$$

2) Пусть $a + b = \overline{0}$. Имеем:

$$b = \overline{0} + b = (-a + a) + b = -a + (a + b) = -a + \overline{0} = -a.$$

3) Рассмотрим вектор $a + 0 \cdot a$. Имеем:

$$a + 0 \cdot a = 1 \cdot a + 0 \cdot a = (1 + 0) \cdot a = 1 \cdot a = a.$$

По свойству 1 имеем $0 \cdot a = \overline{0}$.

4) Рассмотрим вектор $a + (-1) \cdot a$. Имеем:

$$a + (-1) \cdot a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a = (1 - 1) \cdot a = 0 \cdot a = \overline{0}.$$

По свойству 2 имеем $(-1) \cdot a = -a$.

Замечание. Для любого действительного числа λ выполняется соотношение

$$\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}.$$

Действительно, пусть λ — действительное число. Тогда $\lambda \cdot \overline{0} + \lambda \cdot \overline{0} = \lambda(\overline{0} + \overline{0}) = \lambda \cdot \overline{0}$. По свойству 1 имеем $\lambda \cdot \overline{0} = \overline{0}$.

Для сокращения записи определим операцию *вычитания* векторов. *Разностью* векторов a и b называется вектор $a - b = a + (-b)$, для произвольных векторов a и b.

Таким образом, если $a + b = c$, то $b = c - a$.

6.3. Скалярное произведение

Рассмотрим пространство E геометрических векторов. Определим операцию $pr: E \times E \to E$ проекции вектора a на вектор b. Отложим векторы a и b от одной точки — точки O. Обозначим конец вектора a через A. Пусть B — проекция точки A на прямую, проходящую через точку O и имеющую направляющий вектор b. Вектор $\overline{OB}$ называется *проекцией* вектора a на вектор b. Проекцию вектора a на вектор b будем обозначать в виде $pr_b a$.

Рассмотрим треугольник OAB (рис. 6.7). Этот треугольник — прямоугольный. Поэтому для длины вектора $pr_b a$ имеем:

$$|\, pr_b a \,| = |\, a \,| \cdot |\cos \alpha\,|,$$

где α — угол между векторами a и b. Направление вектора $pr_b a$ совпадает с направлением вектора b, если угол между векторами a и b острый, и противоположно направлению вектора b, если угол α — тупой. Если векторы a и b взаимно перпендикулярны, то $pr_b a = \overline{0}$.

Проекция произвольного вектора на нулевой вектор по определению равна нулевому вектору.

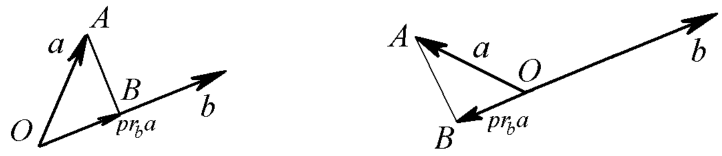

Рис. 6.7. Проекция вектора a на вектор b

Рассмотрим также операцию числовой проекции пр: $E \times E \to \mathbf{R}$. *Числовой проекцией* вектора a на вектор b называется число пр$_b a$, такое что пр$_b a = |\, a \,| \cdot \cos \alpha$, где α — угол между векторами a и b. Число пр$_b a$, абсолютная величина которого совпадает с $|\, pr_b a \,|$ положительно, если угол α острый, и отрицательно, если этот угол тупой; если угол α прямой, то пр$_b a = 0$. Числовая проекция на нулевой вектор по определению равна нулю. Очевидно, что если e — *единичный* вектор, т. е. вектор единичной длины, направление которого совпадает с направлением b, то $pr_b a =$ пр$_b a \cdot e$.

Утверждение 2. Операция числовой проекции обладает следующими свойствами:

1) пр$_b\ \overline{0} = 0$;

2) пр$_b \lambda a = \lambda \cdot$ пр$_b a$;

3) пр$_b(a + c) =$ пр$_b a +$ пр$_b c$

для любых векторов a, b, c и действительного числа λ.

Доказательство. Первое свойство верно по определению, так как длина нулевого вектора равна нулю.

Второе свойство следует из подобия изображенных на рис. 6.8 треугольников.

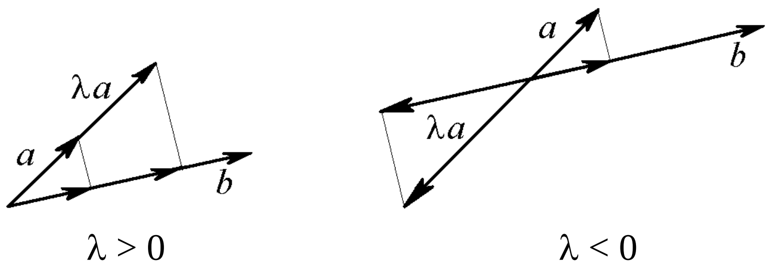

Рис. 6.8. Проекции коллинеарных векторов

Проверим его. Пусть α — угол между векторами a и b. Если $\lambda = 0$, то по свойству 1 равенство верно.

Пусть $\lambda > 0$. Тогда угол между векторами λa и b совпадает с α. Следовательно, $\text{пр}_b \lambda a = |\ \lambda a\ | \cdot \cos\alpha = \lambda|\ a\ | \cdot \cos\alpha = \lambda \cdot \text{пр}_b a$.

Если $\lambda < 0$, то угол между векторами λa и b равен $\pi - \alpha$. Имеем:

$$\text{пр}_b \lambda a = |\ \lambda a\ | \cdot (-\cos\alpha) = (-\lambda)|\ a\ | \cdot (-\cos\alpha) =$$

$$= \lambda|\ a\ | \cdot \cos\alpha = \lambda \cdot \text{пр}_b a.$$

Рассмотрим третье свойство.

Как нетрудно проверить, $pr_b(a + c) = pr_b a + pr_b c$ (рис. 6.9). Поэтому $\text{пр}_b(a + c) \cdot e = \text{пр}_b a \cdot e + \text{пр}_b c \cdot e = (\text{пр}_b a + \text{пр}_b c) \cdot e$. Следовательно, $\text{пр}_b(a + c) = \text{пр}_b a + \text{пр}_b c$.

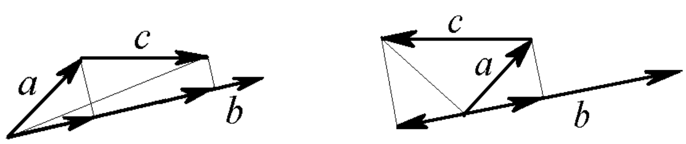

Рис. 6.9. Проекции суммы векторов

В пространстве геометрических векторов определим теперь операцию скалярного произведения (_, _): $E \times E \to \mathbf{R}$.

Определение. Пусть a и b — геометрические векторы. *Скалярным произведением* векторов a и b называется следующее число:

$$(a, b) = |\ b\ | \cdot \text{пр}_b a.$$

Заметим, что $(a, b) = |\ b\ | \cdot \text{пр}_b a = |\ b\ | \cdot |\ a\ | \cdot \cos\alpha = |\ a\ | \cdot \text{пр}_a b$, где α — угол между векторами a и b.

Таким образом, скалярное произведение векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$(a, b) = |\ a\ | \cdot |\ b\ | \cdot \cos\alpha.$$

Утверждение 3. Операция скалярного произведения векторов обладает следующими свойствами:

1) $(a, a) \geq 0$, причем $(a, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \bar{0}$;

2) $(a, b) = (b, a)$;

3) $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$;

4) $(a + c, b) = (a, b) + (c, b)$

для произвольных векторов a, b, c и любого действительного числа λ.

Доказательство. 1. Для любого вектора a имеем:

$$(a, a) = |\, a\,|^2 \cdot \cos 0 = |\, a\,|^2 \geq 0,$$

причем $(a, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $|\, a\,| = 0$. Нулевую длину имеет только нулевой вектор, поэтому равенство $|\, a\,| = 0$ равносильно $a = \overline{0}$.

2. Свойство 2 следует из соотношения $(a, b) = |\, a\,| \cdot |\, b\,| \cdot \cos \alpha$.

3. Пусть a и b — любые векторы и λ — произвольное действительное число. Имеем:

$$(\lambda a, b) = |\, b\,| \cdot \text{пр}_b \lambda a = |\, b\,| \cdot \lambda \cdot \text{пр}_b a = \lambda \cdot |\, b\,| \cdot \text{пр}_b a = \lambda(a, b).$$

4. Для произвольных векторов a, b и c имеем:

$$(a + c, b) = |\, b\,| \cdot \text{пр}_b(a + c) = |\, b\,| \cdot (\text{пр}_b a + \text{пр}_b c) =$$
$$= |\, b\,| \cdot \text{пр}_b a + |\, b\,| \cdot \text{пр}_b c = (a, b) + (c, b).$$

Замечание. Два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

Заметим также, что длина вектора a удовлетворяет соотношению: $|\, a\,| = \sqrt{(a,a)}$.

Определение. Система координат называется *ортогональной*, если все ее оси взаимно перпендикулярны.

Рассмотрим декартову систему координат пространства, которая по определению является ортогональной, и, кроме того, определяющие ее векторы i, j и k имеют единичную длину. Для этих векторов верны равенства:

$$(i, i) = (j, j) = (k, k) = 1 \quad \text{и} \quad (i, j) = (j, k) = (k, i) = 0.$$

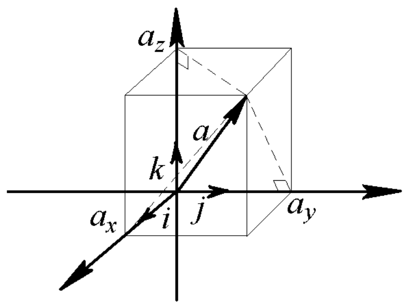

Рис. 6.10. Декартовы координаты вектора

Пусть a — произвольный вектор пространства E. *Координатами вектора* a называются его числовые проекции на векторы i, j и k. Обозначим числовые проекции вектора a на векторы i, j и k через a_x, a_y и a_z, соответственно. Тогда вектор a может быть представлен следующим образом рис. 6.10):

$$a = a_x i + a_y j + a_z k = (a_x, a_y, a_z).$$

Найдем выражение скалярного произведения векторов через их координаты.

Утверждение 4. Пусть a и b — произвольные векторы, $a = (x_1, y_1, z_1)$ и $b = (x_2, y_2, z_2)$. Тогда

$$(a, b) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Доказательство. По свойствам скалярного произведения имеем:

$$\begin{gathered}(a,\ b) = (x_1i + y_1j + z_1k,\ x_2i + y_2j + z_2k) = x_1x_2(i, i) + x_1y_2(i, j) + \\ + x_1z_2(i, k) + y_1x_2(j, i) + y_1y_2(j, j) + y_1z_2(j, k) + z_1x_2(k, i) + \\ + z_1y_2(k, j) + z_1z_2(k, k) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.\end{gathered}$$

Координатами точки A называются координаты ее радиус-вектора $\overline{OA}$. Точка A с координатами (x, y, z) будет обозначаться в виде $A(x, y, z)$.

Обобщим понятие скалярного произведения векторов на случай произвольного векторного пространства.

6.4. Евклидово пространство

Определение. *Евклидовым пространством* E называется векторное пространство вместе с операцией $(\_, \_)\colon E \times E \to \mathbf{R}$, называемой *скалярным произведением*, которая обладает следующими свойствами:

1°. $(a, a) \geq 0$, причем $(a, a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = \overline{0}$;

2°. $(a, b) = (b, a)$;

3°. $(\lambda a, b) = \lambda(a, b)$;

4°. $(a + c, b) = (a, b) + (c, b)$

для произвольных векторов a, b, c и любого действительного числа λ.

Рассмотрим примеры евклидовых пространств.

Пример 7. Пространство геометрических векторов с определенным выше скалярным произведением является евклидовым.

Пример 8. Рассмотрим пространство $\mathbf{R}^n$. Пусть $x = (x_1, x_2,..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2,..., y_n)$ — произвольные векторы $\mathbf{R}^n$. Определим скалярное произведение векторов x и y следующим образом:

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

Нетрудно проверить, что выполняются все свойства скалярного произведения.

Пример 9. Векторное пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций со скалярным произведением, заданным следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt,$$

образует, как легко проверить, евклидово пространство.

Определим в произвольном евклидовом пространстве понятие длины вектора.

Определение. Пусть x — элемент евклидова пространства. *Длиной* вектора x называется величина $|x| = \sqrt{(x,x)}$.

Утверждение 5. Пусть x — вектор евклидова пространства и λ — действительное число. Тогда

1) $|x| \geq 0$, причем $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = \bar{0}$;

2) $|\lambda x| = |\lambda||x|$.

Доказательство. Первое соотношение верно по определению скалярного произведения. Рассмотрим второе соотношение. Имеем: $|\lambda x|^2 = (\lambda x, \lambda x) = \lambda^2(x, x) = \lambda^2|x|^2$. Следовательно, $|\lambda x| = |\lambda||x|$.

Теорема Коши-Буняковского. Для элементов x и y евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(x, y)| \leq |x||y|.$$

Доказательство. Для любого действительного числа t имеем:

$$0 \leq (x + ty, x + ty) = (x, x) + t(y, x) + t(x, y) + t^2(y, y) =$$

$$= |y|^2t^2 + 2(x, y)t + |x|^2.$$

Таким образом, значение квадратного трехчлена

$$|y|^2t^2 + 2(x, y)t + |x|^2$$

неотрицательно для любого значения t. Старший коэффициент трехчлена неотрицателен, поэтому его дискриминант D неположителен. Имеем:

$$\frac{D}{4} = (x, y)^2 - |x|^2|y|^2 \le 0, \text{ откуда } |(x, y)| \le |x||y|.$$

Пример 10. По неравенству Коши-Буняковского, если $x_1, x_2,\dots, x_n$ и $y_1, y_2,\dots, y_n$ — действительные числа, то верно неравенство:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right).$$

Пример 11. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, то

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \le \int_a^b f^2(t)dt \cdot \int_a^b g^2(t)dt.$$

Определение. *Косинусом угла* между векторами x и y евклидова пространства называется величина

$$\cos(x, y) = \frac{(x, y)}{|x||y|}.$$

По неравенству Коши-Буняковского абсолютная величина правой части равенства не превосходит единицы, поэтому определение корректно.

Определение. Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными* (*перпендикулярными*).

Если a и b — два ортогональных вектора, то для условия их ортогональности используется обозначение: $a \perp b$.

Теорема (неравенство треугольника). Для любых векторов x и y евклидова пространства выполняется неравенство (рис. 6.11):

$$|x + y| \le |x| + |y|.$$

Доказательство. По неравенству Коши–Буняковского имеем

$$| x + y |^2 = (x + y, x + y) = | x |^2 + 2(x, y) + | y |^2 \le$$
$$\le | x |^2 + 2| (x, y) | + | y |^2 \le | x |^2 + 2| x || y | + | y |^2 = (| x | + | y |)^2.$$

Поэтому $| x + y | \le | x | + | y |$.

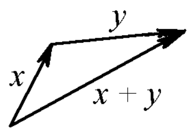

Рис. 6.11. Неравенство треугольника в евклидовом пространстве

Неравенство треугольника называют также неравенством Минковского.

Теорема Пифагора. В произвольном евклидовом пространстве равенство $| x + y |^2 = | x |^2 + | y |^2$ выполняется тогда и только тогда, когда $(x, y) = 0$ (рис. 6.12).

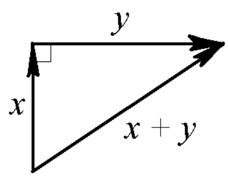

Рис. 6.12. Теорема Пифагора в евклидовом пространстве

Доказательство. Имеем:

$$| x + y |^2 = (x + y, x + y) = | x |^2 + 2(x, y) + | y |^2.$$

Очевидно, что равенство $| x |^2 + 2(x, y) + | y |^2 = | x |^2 + | y |^2$ верно, если и только если $(x, y) = 0$.

6.5. Прямая

Прямая на плоскости или в пространстве определяется точкой и направляющим вектором. Пусть A — точка плоскости или пространства и b — ненулевой вектор. Тогда множество точек M прямой, проходящей через точку A по направлению b, удовлетворяет условию: $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + tb$ для $t \in \mathbf{R}$ (рис. 6.13).

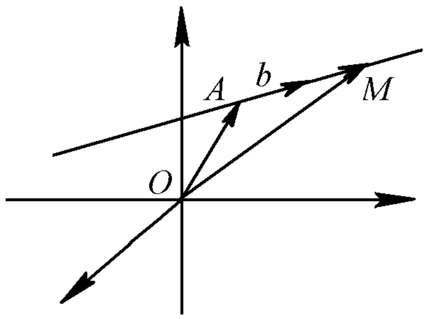

Рис. 6.13. Прямая, заданная точкой и направляющим вектором

6.5.1. Прямая на плоскости

Параметрическое уравнение прямой. Пусть $\overline{OA} = (x_0,\ y_0)$ и $b = (b_x,\ b_y)$. Тогда параметрическое уравнение прямой на плоскости имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + tb_x, \\ y = y_0 + tb_y, \end{cases}$$

где $t \in \mathbf{R}$. Обратно, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этим равенствам, является прямой на плоскости.

Непараметрическое уравнение прямой. Уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$ по направлению вектора $(b_x,\ b_y)$, как следует из предыдущего соотношения, имеет вид:

$$b_y(x - x_0) = b_x(y - y_0).$$

В частности, если $b_x \neq 0$ и $b_y \neq 0$, то уравнение можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{b_x} = \frac{y - y_0}{b_y}.$$

Уравнение прямой, заданной двумя точками. Пусть $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ — две произвольные несовпадающие точки плоскости. Найдем уравнение прямой l, проходящей через точки A и B. Очевидно, что вектор $\overline{AB}$ является направляющим вектором прямой l. Имеем: $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Поэтому уравнение прямой, заданной точками A и B, имеет вид:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) = (x_1 - x_0)(y - y_0).$$

В частности, если $x_1 = x_0$, получаем уравнение $x = x_0$. Если $y_1 = y_0$, то уравнение $y = y_0$. Если $x_1 \neq x_0$ и $y_1 \neq y_0$, то уравнение прямой, проходящей через точки A и B, можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Общее уравнение прямой. В уравнении $b_y(x - x_0) = b_x(y - y_0)$ положим $A = b_y$, $B = -b_x$, $C = b_y x_0 - b_x y_0$. В результате получим уравнение

$$Ax + By = C,$$

которое называется *общим уравнением прямой* на плоскости. Очевидно, что вектор $b = (B, -A)$ является направляющим вектором прямой, заданной этим уравнением.

Теорема 1. Вектор $N = (A, B)$ перпендикулярен любому вектору, лежащему на прямой l, заданной уравнением $Ax + By = C$.

Доказательство. Пусть точки $M(x_1, y_1)$ и $K(x_2, y_2)$ лежат на прямой l. Тогда верны равенства: $Ax_1 + By_1 = C$ и $Ax_2 + By_2 = C$. Вычтем из второго равенства первое. Имеем: $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Далее, $\overline{MK} = \overline{OK} - \overline{OM} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$, поэтому $(N, \overline{MK}) = 0$, что и означает, что $N \perp \overline{MK}$.

Уравнение перпендикуляра. Найдем уравнение перпендикуляра l из точки $D(x_0, y_0)$ к прямой $Ax + By = C$.

Имеем: точка D принадлежит прямой l, а вектор (A, B) является ее направляющим вектором. Поэтому уравнение прямой l можно записать в виде: $B(x - x_0) - A(y - y_0) = 0$. Если $A \neq 0$ и $B \neq 0$, то его можно записать также следующим образом:

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B}.$$

Угол между прямыми. Один из двух углов между прямыми l_1 и l_2, заданными уравнениями $A_1x + B_1y = C_1$ и $A_2x + B_2y = C_2$ соответственно, равен углу α между перпендикулярными им векторами $N_1 = (A_1, B_1)$ и $N_2 = (A_2, B_2)$, а другой — углу $\pi - \alpha$. По формуле скалярного произведения векторов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Если $\cos\alpha > 0$, то α — острый угол между прямыми, а если $\cos\alpha < 0$, то тупой. Для случая, изображенного на рисунке 6.14,

$$\cos\alpha = -\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

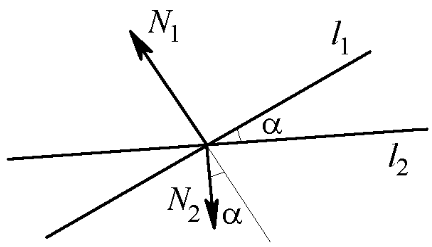

Рис. 6.14. Угол между прямыми

Следствие 1 (условие перпендикулярности прямых). Прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Следствие 2 (условие параллельности прямых). Прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда выполняется условие: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$. Если $A_2 \neq 0$ и $B_2 \neq 0$, то его можно записать в виде:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Данное соотношение выражает условие коллинеарности векторов $N_1 = (A_1, B_1)$ и $N_2 = (A_2, B_2)$.

Нормальное уравнение прямой. Пусть l — произвольная прямая и n — единичный вектор, перпендикулярный прямой l. Заметим, что существует ровно два единичных вектора, перпендикулярных прямой l. Пусть $M(x, y)$ — точка прямой l. Абсолютная величина числовой проекции $\text{пр}_n\overline{OM}$ вектора $\overline{OM}$ на вектор n равна расстоянию от начала координат до прямой l, поэтому она не зависит от точки M. Обозначим это расстояние через p. Выберем вектор n так, чтобы величина $\text{пр}_n\overline{OM}$ была неотрицательна. Тогда $\text{пр}_n\overline{OM} = p$. Полученное уравнение называется *нормальным уравнением* прямой, а вектор n — ее *нормальным* вектором (рис. 6.15).

Запишем нормальное уравнение в координатах. Пусть $n = (n_x, n_y)$. Тогда $\text{пр}_n\overline{OM} = |\,n\,| \cdot \text{пр}_n\overline{OM} = (n, \overline{OM}) = n_x x + n_y y$. Поэтому нормальное уравнение имеет вид: $n_x x + n_y y = p$. Но n_x и n_y — это числовые проекции единичного вектора n на векторы i и j координатных осей. Поэтому $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \cos\beta$, где α и β — углы, которые образует вектор n с координатными осями. Очевидно, что $\cos\beta = \sin\alpha$. Следовательно, нормальное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y = p.$$

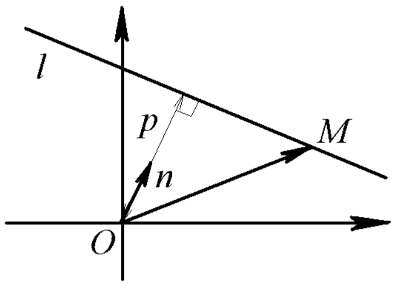

Рис. 6.15. Нормальный вектор прямой

Если прямая l задана уравнением $Ax + By = C$, то его можно привести к нормальному виду. Имеем: $n = \pm\dfrac{N}{|\,N\,|} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(A, B)$, где выбирается знак «+», если $C \geq 0$, и знак «–», если $C < 0$. Таким образом, нормальное уравнение прямой l имеет вид:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}},$$

где знак выбирается так, чтобы правая часть уравнения была неотрицательной.

Расстояние от точки до прямой на плоскости. Найдем расстояние $\rho(M, l)$ от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l. Пусть n — нормальный вектор прямой l, а p — расстояние от этой прямой до начала координат. Имеем: $\rho(M, l) = |\,\text{пр}_n\overline{OM} - p\,| = |\,n_x x_0 + n_y y_0 - p\,|$ (рис. 6.16).

Если прямая l задана общим уравнением $Ax + By = C$, то расстояние от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой l можно соответственно найти следующим образом:

$$\rho(M, l) = \frac{|\,Ax_0 + By_0 - C\,|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

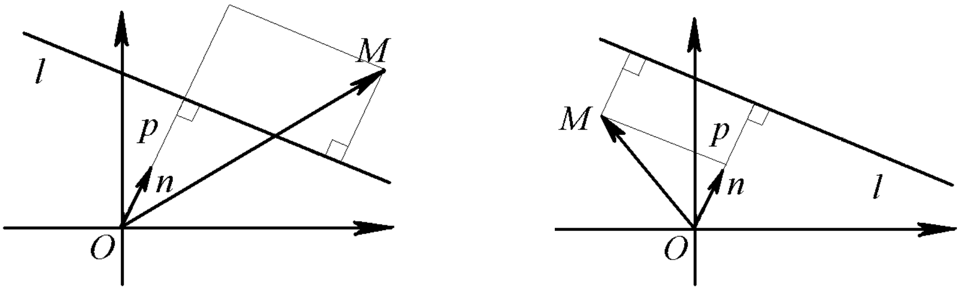

Рис. 6.16. Определение расстояния от точки до прямой

Уравнение биссектрисы. Найдем уравнения биссектрис углов между прямыми, заданными уравнениями $A_1x + B_1y = C_1$ и $A_2x + B_2y = C_2$ соответственно. Расстояние от точки $M(x, y)$, лежащей на биссектрисе, до каждой из прямых одинаково. Поэтому имеет место равенство:

$$\frac{|A_1x + B_1y - C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y - C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

При раскрытии модулей получаются уравнения двух биссектрис.

Пример 12. Пусть точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит прямой l, заданной уравнением $Ax + By = C$. Найдем координаты точек P и Q, отстоящих от точки M на расстояние d и лежащих на перпендикуляре к l, проходящем через точку M (рис. 6.17).

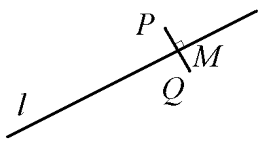

Рис. 6.17. Точки, равноотстоящие от прямой

Пусть n — нормальный вектор прямой l. Тогда

$$\overline{OP} = \overline{OM} + \overline{MP} = \overline{OM} + dn,\ \overline{OQ} = \overline{OM} - dn.$$

Таким образом, координаты точек P и Q имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 \pm d\dfrac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \\ y = y_0 \pm d\dfrac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \end{cases}$$

6.5.2 Прямая в пространстве

Параметрическое уравнение прямой в пространстве. Пусть $A(x_0, y_0, z_0)$ и $b = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда параметрическое уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку A по направлению вектора, имеет вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + tb_x, \\ y = y_0 + tb_y, \\ z = z_0 + tb_z, \end{cases}$$

где $t \in \mathbf{R}$.

Непараметрическое уравнение прямой в пространстве. Как и в случае плоскости, получим, что уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) по направлению вектора (b_x, b_y, b_z), можно записать в виде:

$$\frac{x - x_0}{b_x} = \frac{y - y_0}{b_y} = \frac{z - z_0}{b_z}.$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве. Найдем расстояние $\rho(M, l)$ от точки M до прямой l, проходящей через точку A по направлению вектора b.

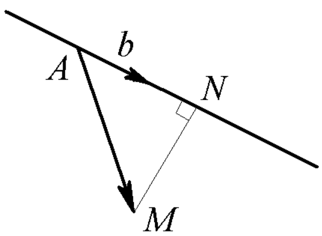

Рис. 6.18. Определение расстояния от точки до прямой в пространстве

Пусть N — проекция точки M на прямую l (рис. 6.18). Треугольник AMN — прямоугольный, поэтому $|MN| = |AM| \cdot |\sin\alpha|$, где α — угол между векторами $\overline{AM}$ и b. Поэтому

$$\rho(M, l) = |MN| = |AM| \cdot |\sin\alpha| = \sqrt{|AM|^2 - \frac{(\overline{AM}, b)^2}{|b|^2}}.$$

Теорема 2. Пусть A и B — точки пространства E такие, что $A \neq B$. Тогда любая точка C такая, что $\overline{OC} = \lambda\overline{OA} + \mu\overline{OB}$, где λ и μ — неотрицательные действительные числа, $\lambda + \mu = 1$, лежит на отрезке AB, при этом $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Доказательство. Имеем:

$$\overline{OC} = (1 - \mu)\overline{OA} + \mu\overline{OB} = \overline{OA} + \mu(\overline{OB} - \overline{OA}) = \overline{OA} + \mu\overline{AB}.$$

Следовательно, $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \mu\overline{AB}$, где $0 \leq \mu \leq 1$. Поэтому точка C лежит на отрезке AB, и $|AC| = \mu|AB|$. Очевидно, что

$$|CB| = |AB| - |AC| = |AB| - \mu|AB| = (1 - \mu)|AB| = \lambda|AB|.$$

Таким образом, $\dfrac{|AC|}{|CB|} = \dfrac{\mu}{\lambda}$.

Деление отрезка в данном отношении. Найдем точку C, которая делит отрезок AB в отношении $p : q$, считая от точки A. Имеем:

$$\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{p}{p+q}\overline{AB} = \overline{OA}\frac{p}{p+q} + (\overline{OB} - \overline{OA}).$$

Таким образом,

$$\overline{OC} = \frac{p}{p+q}\overline{OA} + \frac{p}{p+q}\overline{OB}.$$

Следствие. Середина C отрезка AB задается выражением:

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB}).$$

Понятия прямой и отрезка обобщаются на случай точечно-векторного пространства $\mathbf{R}^n$ следующим образом. *Прямой* в пространстве $\mathbf{R}^n$, проходящей через точку A в направлении вектора b, называется множество $\{\overline{OA} + tb \mid t \in \mathbf{R}\}$. Множество точек

$$\{\lambda\overline{OA} + (1 - \lambda)\overline{OB} \mid \lambda \in \mathbf{R}, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

называется *отрезком* AB в пространстве $\mathbf{R}^n$. Очевидно, что множество точек отрезка AB является подмножеством точек прямой, проходящей через точки A и B.

6.6 Плоскость

Определение. *Плоскостью* π в векторном пространстве E, заданной точкой P и двумя неколлинеарными векторами a и b, называется множество точек M таких, что $\overline{OM} = \overline{OP} + ua + vb$, где $u, v \in \mathbf{R}$ (рис.6.19).

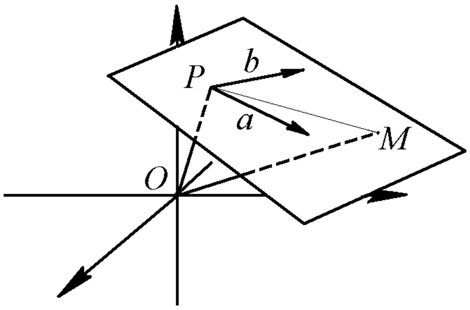

Рис. 6.19. Плоскость, заданная точкой и двумя направляющими векторами

Параметрическое уравнение плоскости. Пусть $P(x_0, y_0, z_0)$, $a = (a_x, a_y, a_z)$, $b = (b_x, b_y, b_z)$. Тогда параметрическое уравнение плоскости π, заданной точкой P и векторами a и b, имеет вид

$$\begin{cases} x = x_0 + ua_x + vb_x, \\ y = y_0 + ua_y + vb_y, \\ z = z_0 + ua_z + vb_z, \end{cases}$$

где $u, v \in \mathbf{R}$.

Непараметрическое уравнение плоскости. Если выразить параметры u и v из системы трех равенств, приведенной выше, то получится уравнение плоскости π вида

$$Ax + By + Cz = D,$$

которое называется *общим уравнением* плоскости.

Следующие утверждения получаются в результате рассуждений, аналогичных тем, что были проведены для уравнения прямой на плоскости.

Теорема 3. Вектор $N = (A, B, C)$ перпендикулярен любому вектору, лежащему в плоскости, заданной уравнением $Ax + By + Cz = D$.

Нормальное уравнение плоскости. Пусть n — единичный вектор, ортогональный плоскости π, p — расстояние от начала координат до плоскости π и M — произвольная точка этой плоскости. Тогда уравнение $\text{пр}_n \overline{OM} = p$ называется *нормальным уравнением* плоскости π, а вектор n — *нормальным вектором* этой плоскости.

Если $n = (n_x, n_y, n_z)$, то нормальное уравнение плоскости имеет вид $n_x x + n_y y + n_z z = p$. Пусть $n_x = \cos\alpha$, $n_y = \cos\beta$, $n_z = \cos\gamma$, где α, β и γ — углы, которые образует вектор n с координатными осями. Тогда нормальное уравнение плоскости можно записать в виде:

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z = p.$$

Если плоскость π задана уравнением $Ax + By + Cz = D$, то ее нормальное уравнение имеет вид:

$$\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x \pm \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y \pm \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z = \pm\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак (+ или –) выбирается так, чтобы правая часть уравнения была неотрицательной.

Расстояние от точки до плоскости. Если плоскость π задана нормальным уравнением $n_x x + n_y y + n_z z = p$, то для расстояния $\rho(M, \pi)$ от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости π имеем:

$$\rho(M, \pi) = |\, n_x x_0 + n_y y_0 + n_z z_0 - p \,|.$$

Если $Ax + By + Cz = D$ — общее уравнение плоскости π, то расстояние $\rho(M, \pi)$ можно найти следующим образом:

$$\rho(M, \pi) = \frac{|\, Ax_0 + By_0 + Cz_0 - D \,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Угол между плоскостями. Углы между плоскостями π_1 и π_2, заданными уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ и $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ соответственно, находятся с помощью вычисления косинуса угла между векторами $N_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $N_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Таким образом:

$$\cos\alpha = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

При выборе разных знаков в правой части равенства получаются оба угла между плоскостями π_1 и π_2.

Следствие 1 (условие перпендикулярности плоскостей). Плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Следствие 2 (условие параллельности плоскостей). Плоскости π_1 и π_2 параллельны тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Очевидно, что это соотношение выражает условие коллинеарности векторов $N_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $N_2 = (A_2, B_2, C_2)$.

Уравнение плоскости, заданной тремя точками. Найдем уравнение плоскости π вида $Ax + By + Cz = D$, проходящей через точки $P(x_1, y_1, z_1)$, $Q(x_2, y_2, z_2)$ и $R(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка плоскости π. Точки P, Q и R принадлежат плоскости π, поэтому их координаты удовлетворяют уравнению этой плоскости. Имеем:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz = D, \\ Ax_1 + By_1 + Cz_1 = D, \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 = D, \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 = D. \end{cases}$$

Вычтем второе равенство из остальных равенств. В результате получим однородную систему линейных уравнений вида:

$$\begin{cases} A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0, \\ A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \\ A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0 \end{cases}$$

с неизвестными A, B и C. По теореме Крамера ненулевое решение этой системы может существовать только в случае равенства нулю определителя матрицы этой системы.

Соотношение, выражающее это условие, и задает уравнение плоскости π. Имеем:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Разлагая определитель по первой строке, получим уравнение плоскости π в виде:

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} - (y-y_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+ (z-z_1)\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Следствие. Уравнение плоскости, заданной точкой $P(x_0, y_0, z_0)$ и векторами $a = (a_x, a_y, a_z)$ и $b = (b_x, b_y, b_z)$, можно записать следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0.$$

Для доказательства достаточно отложить векторы a и b от точки P.

Прямая как пересечение двух плоскостей. Пусть плоскости π_1 и π_2, заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z = D_1$ и $A_2x + B_2y + C_2z = D_2$ соответственно. Если плоскости π_1 и π_2 пересекаются, то система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \end{cases}$$

совместна. Ясно, что если ранг r матрицы этой системы равен 1, то плоскости π_1 и π_2 совпадают. В случае $r = 2$ пересечением плоскостей π_1 и π_2 является прямая, которую задает общее решение этой системы уравнений.

Пример 13. Найдем параметрическое уравнение прямой l, заданной как пересечение плоскостей следующим образом:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ 3x - 2y + z = 6. \end{cases}$$

По методу Гаусса имеем:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 3, \\ \quad\;\; y - 5z = -3 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \qquad - 3z = 0, \\ \quad\;\; y - 5z = -3. \end{cases}$$

Выберем x и y в качестве главных неизвестных. Тогда неизвестная z — свободная. Следовательно, уравнение прямой l можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = 3t \\ y = -3 + 5t, \\ z = t \end{cases}$$

Таким образом, прямая l проходит через точку $M(0, -3, 0)$ и имеет направляющий вектор $b = (3, 5, 1)$.

6.7. Векторное произведение

Геометрический смысл определителя второго порядка. Пусть $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ — векторы плоскости. Обозначим

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Покажем, что абсолютная величина определителя $\Delta(a, b)$ равна площади параллелограмма, заданного векторами a и b, или *натянутого* на векторы a и b (рис. 6.20).

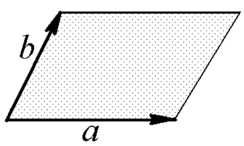

Рис. 6.20. Параллелограмм, натянутый на пару векторов

Пусть $S(a, b)$ — площадь параллелограмма, заданного векторами a и b.

Утверждение 6. Для произвольных векторов a и b и любого действительного числа λ выполнены свойства:

1) $S(b, a) = S(a, b)$;

2) $S(a, b + \lambda a) = S(a, b)$.

Доказательство. Первое свойство очевидно верно. Докажем второе свойство.

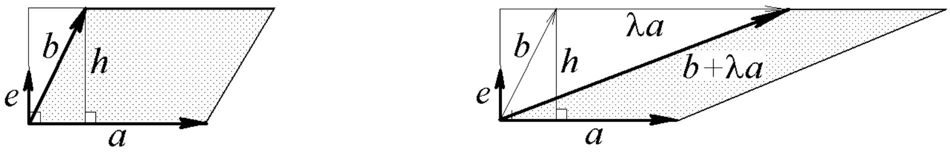

Рис. 6.21. Свойства функции $S(a, b)$

Пусть e — единичный вектор, перпендикулярный вектору a, и h — высота параллелограмма, заданного векторами a и b, опущенная на сторону a (рис. 6.21). Тогда $h = |\,\text{пр}_e b\,|$. Поэтому

$$S(a, b) = |\,a\,|\,|\,\text{пр}_e b\,|.$$

С другой стороны, так как $a \perp e$, то $\text{пр}_e a = 0$. Поэтому

$$S(a, b + \lambda a) = |\,a\,|\,|\,\text{пр}_e(b + \lambda a)\,| = |\,a\,|\,|\,\text{пр}_e b + \text{пр}_e \lambda a\,| =$$
$$= |\,a\,|\,|\,\text{пр}_e b + \lambda \text{пр}_e a\,| = |\,a\,|\,|\,\text{пр}_e b\,| = S(a, b).$$

Теорема 4. Для любых векторов a и b верно равенство:

$$|\,\Delta(a, b)\,| = S(a, b).$$

Доказательство. Если первая координата каждого из векторов $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ равна нулю, то равенство верно, так как обе его части в этом случае равны нулю. Пусть $a_1 \neq 0$ (в противном случае поменяем строки определителя местами, при этом его абсолютная величина не изменится). По методу Гаусса имеем:

$$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b_2' \end{vmatrix}.$$

Таким образом, существует такое число λ, что

$$b' = b + \lambda a = (0, b'_2).$$

Если $b'_2 = 0$, то векторы a и b коллинеарны, и утверждение теоремы верно, так как в этом случае обе части равенства равны нулю. Пусть $b'_2 \neq 0$. Тогда по методу Гаусса будем иметь:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & b'_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_1 & 0 \\ 0 & b'_2 \end{vmatrix} = a'_1 b'_2 .$$

Следовательно, существует такое число μ, что

$$a' = a + \mu b' = (a'_1, 0).$$

Таким образом, $|\,\Delta(a, b)\,| = |\,a'_1\,||\,b'_2\,| = |\,a'\,||\,b'\,|$. С другой стороны, векторы a' и b' перпендикулярны, поэтому заданный ими параллелограмм является прямоугольником, и его площадь равна произведению их длин. Поэтому $S(a', b') = |\,a'\,||\,b'\,| = |\,\Delta(a, b)\,|$. Имеем:

$$S(a', b') = S(a + \mu b', b') = S(a, b') = S(a, b + \lambda a) = S(a, b).$$

Таким образом, $|\,\Delta(a, b)\,| = S(a, b)$.

Геометрический смысл определителя третьего порядка. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ и $c = (c_1, c_2, c_3)$ — произвольные векторы пространства. Обозначим

$$\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Покажем, что абсолютная величина определителя $\Delta(a, b, c)$ равна объему $V(a, b, c)$ параллелепипеда, заданного векторами a, b и c, или *натянутого* на векторы a, b и c (рис. 6.22).

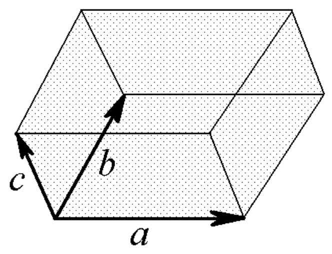

Рис. 6.22. Параллелепипед, натянутый на три вектора

Утверждение 7. Для произвольных векторов a, b и c и любого действительного числа λ выполнены свойства

1) $V(a, b, c) = V(a, c, b) = V(c, b, a)$;

2) $V(a + \lambda b, b, c) = V(a, b, c)$.

Доказательство. Очевидно, что первое свойство верно. Докажем второе свойство. Пусть e — единичный вектор, ортогональный плоскости с направляющими векторами b и c, и h — высота параллелепипеда, опущенная на грань, заданную этими векторами (рис. 6.23). Тогда $h = |\ \text{пр}_e a\ |$. Поэтому

$$V(a, b, c) = hS(b, c) = |\ \text{пр}_e a\ |\ S(b, c).$$

С другой стороны, векторы b и e перпендикулярны. Следовательно, $\text{пр}_e b = 0$. Таким образом,

$$V(a + \lambda b, b, c) = |\ \text{пр}_e(a + \lambda b)\ |\ S(b, c) = |\ \text{пр}_e a + \text{пр}_e \lambda b\ |\ S(b, c) =$$
$$= |\ \text{пр}_e a + \lambda \text{пр}_e b\ |\ S(b, c) = |\ \text{пр}_e a\ |\ S(b, c) = V(a, b, c).$$

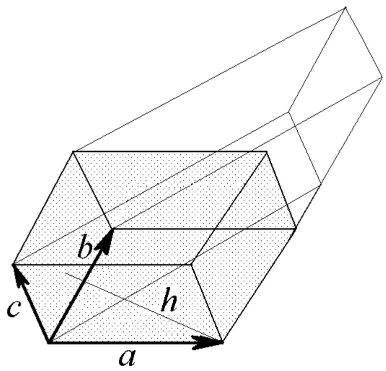

Рис. 6.23. Свойства функции $V(a, b, c)$

Теорема 5. Для любых векторов a, b и c верно равенство:

$$|\ \Delta(a, b, c)\ | = V(a, b, c).$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 4, приведем определитель $\Delta(a, b, c)$ к диагональному виду по методу Гаусса, используя только первое и второе элементарные преобразования над строками. При этом абсолютная величина определителя не изменится. Имеем:

$$\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & 0 & 0 \\ 0 & b_2' & 0 \\ 0 & 0 & c_3' \end{vmatrix} = a_1' b_2' c_3'.$$

Таким образом, существуют взаимно перпендикулярные векторы $a' = (a'_1, 0, 0)$, $b' = (0, b'_2, 0)$ и $c' = (0, 0, c'_3)$, такие что

$$|\ \Delta(a, b, c)\ | = |\ a'_1\ ||\ b'_2\ ||\ c'_3\ | = |\ a'\ ||\ b'\ ||\ c'\ |.$$

С другой стороны, $V(a, b, c) = V(a', b', c') = |a'||b'||c'|$. Следовательно, $|\Delta(a, b, c)| = V(a, b, c)$.

Теорема 5 применяется для вычисления объемов некоторых пространственных фигур. Например, объем призмы равен половине объема параллелепипеда, а объем тетраэдра — шестой части от объема параллелепипеда.

Рассмотрим операцию [_, _]: $E \times E \to E$ векторного произведения векторов.

Определение. *Векторным произведением* векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ называется вектор $[a, b]$ с координатами

$$\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Векторное произведение $[a, b]$ будем обозначать также $a \times b$.

Векторное произведение $a \times b$ можно записать в виде обобщенного определителя третьего порядка следующим образом:

$$a \times b = i\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Теорема 6. Вектор $a \times b$ перпендикулярен векторам a и b. Длина вектора $a \times b$ равна площади параллелограмма, натянутого на векторы a и b (рис. 6.24).

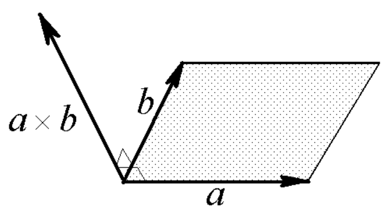

Рис. 6.24. Векторное произведение

Доказательство. Имеем:

$$(a,\, a \times b) = a_1\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Аналогично, $(b,\, a \times b) = 0$. Таким образом, $a \perp a \times b$ и $b \perp a \times b$.

Пусть $n = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор, перпендикулярный векторам a и b. Тогда $V(n, a, b) = |\, n\,| S(a, b) = S(a, b)$. С другой стороны,

$$\begin{vmatrix} n_x & n_y & n_z \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = n_x\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - n_y\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + n_z\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (n,\, a \times b).$$

Следовательно,

$$S(a, b) = |\,(n,\, a \times b)\,| = |\, n \,||\, a \times b \,||\cos 0\,| = |\, a \times b\,|.$$

Таким образом, $|\, a \times b\,| = S(a, b)$.

Следствие. Пусть α — угол между векторами a и b. Тогда

$$|\, a \times b\,| = |\, a\,| \cdot |\, b\,| \cdot \sin\alpha.$$

Таким образом, если векторы a и b отличны от нулевого вектора, то

$$\sin\alpha = \frac{|\, a \times b\,|}{|\, a \,||\, b\,|}.$$

Пример 14. Найдем площадь S треугольника ABC, где $A(2, 0, 1)$, $B(–1, 3, 2)$, $C(–1, 1, 0)$. Имеем: $\overline{AB} = (–3, 3, 1)$, $\overline{AC} = (–3, 1, –1)$. Следовательно,

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4i - 6j + 6k = (-4, -6, 6).$$

Поэтому $S = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \sqrt{22}$.

Утверждение 8. Для произвольных векторов a, b и c и любого действительного числа λ выполнены свойства:

1) $b \times a = -\, a \times b$;

2) $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$;

3) $(a + c) \times b = a \times b + c \times b$;

4) $|\,(a, b \times c)\,| = V(a, b, c)$.

Доказательство. Пусть $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ и $c = (c_1, c_2, c_3)$. По свойствам определителя имеем:

$$b \times a = \begin{vmatrix} i & j & k \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\, a \times b.$$

Второе и третье свойства проверяются аналогично.

Проверим свойство 4. Имеем:

$$\Delta(a, b, c) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = (a, b \times c).$$

Таким образом, $|\,(a, b \times c)\,| = V(a, b, c)$.

Определение. Величина $(a, b \times c)$ называется *смешанным произведением* векторов a, b и c.

Очевидно, что $(a, b \times c) = (b, c \times a) = (c, a \times b)$.

Замечание. Векторы a, b и c *компланарны*, т. е. лежат в одной плоскости, тогда и только тогда, когда $(a, b \times c) = 0$.

Как отмечалось выше, вектор $a \times b$ перпендикулярен векторам a и b. Но векторы, перпендикулярные векторам a и b, могут иметь одно из двух противоположных направлений. Направление вектора $a \times b$ соответствует известному из школьного курса физики правилу правого винта.

Определение. Говорят, что *ориентация* тройки некомпланарных векторов a, b и c *положительна*, если $\Delta(a, b, c) > 0$, и *отрицательна*, если $\Delta(a, b, c) < 0$.

Очевидно, что положительная ориентация векторов совпадает с ориентацией векторов i, j и k, так как $\Delta(i, j, k) = 1$.

Утверждение 9. Если векторы a, b и $a \times b$ некомпланарны, то их ориентация положительна.

Доказательство. Для любых векторов a, b и $a \times b$ по свойствам определителя и смешанного произведения имеем:

$$\Delta(a, b, a \times b) = \Delta(a \times b, a, b) = (a \times b, a \times b) = | a \times b |^2 \geq 0.$$

Упражнения

6.1. Составьте уравнение прямой, если точка (2; 3) является основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту прямую.

6.2. Сторона AC треугольника ABC лежит на прямой $x + 2y + 2 = 0$. Найдите уравнение прямой, на которой лежит высота, проведенная из вершины $B(1, -3)$.

6.3. Найдите расстояние от точки пересечения медиан треугольника ABC до прямой, проходящей через точки (–5, 2) и (–9, –1), если $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(3, 3)$.

6.4. Найдите уравнение прямой, на которой лежит биссектриса угла A треугольника ABC, где $A(1, 1)$, $B(5, 4)$, $C(1, 6)$.

6.5. Найдите тангенс острого угла между прямыми $2x - y + 5 = 0$ и $x + y + 10 = 0$.

6.6. Найдите уравнение плоскости, проходящей через точку (–1, 2, 3) и параллельной плоскости треугольника ABC, где $A(1, 1, 1)$, $B(2, -2, 2)$, $C(3, 3, 3)$.

6.7. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку (1, 1, 1) и перпендикулярной прямой $2(x - 1) = y + 2 = z - 3$.

6.8. Найдите длину высоты, проведенной из вершины D тетраэдра $ABCD$, где $A(2, 3, 1)$, $B(2, 4, 0)$, $C(4, 2, 3)$, $D(4, -2, -2)$.

6.9. Найдите тангенс угла между ребром AD и плоскостью ABC тетраэдра $ABCD$, где $A(0, 4, -1)$, $B(5, 0, -1)$, $C(0, 1, -1)$, $D(0, 0, 3)$.

6.10. Найдите площадь треугольника ABC, если $A(-3, -1, 4)$, $B(3, 1, -4)$, $C(0, 1, 0)$.

6.11. Найдите объем тетраэдра $ABCD$, если $A(0, 0, 2)$, $B(2, 2, 4)$, $C(0, 2, 0)$, $D(4, 2, 2)$.

6.12. Найдите координаты центра тяжести треугольника ABC, если $A(3, 1, -4)$, $B(-3, -1, 4)$, $C(0, -1, 0)$.

6.13. Найдите координаты центра тяжести пятиугольника $ABCDE$, если $A(–2, 1)$, $B(2, 5)$, $C(3, 3)$, $D(7, 4)$, $E(5, –3)$.

6.14. Найдите уравнение оси симметрии треугольника ABC, если $A(5, –2)$, $B(4, 2)$, $C(8, 1)$.

6.15. Найдите расстояние от точки $(2, –2, –1)$ до прямой $x = 1 + 2t$, $y = 2t$, $z = 4 – 5t$.