II. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

5. Системы линейных уравнений

5.1. Основные определения теории систем линейных уравнений

Линейными называются уравнения вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b.$$

Заметим, что сумма линейных уравнений является линейным уравнением и что произведение линейного уравнения на действительное число также является линейным уравнением.

Пример 1. Решим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ x - 3y + z = -2, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Исключим из последних двух уравнений неизвестную x. Для этого вычтем из второго уравнения первое, затем из третьего — удвоенное первое. В результате получится следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ -4y + 3z = 1, \\ -y + 3z = 7. \end{cases}$$

Аналогично вычтем из второго уравнения полученной системы третье уравнение, умноженное на 4, затем поменяем два последних уравнения местами, при этом мы исключим из последнего уравнения неизвестную y. Имеем:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ -y + 3z = 7, \\ -9z = -27. \end{cases}$$

Наконец, разделим последнее уравнение на (–9) и найдем значение неизвестной z, после этого из второго уравнения — значение y, а из первого уравнения — значение x. В результате получим следующие значения неизвестных: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Пример 2. Рассмотрим еще одну систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения удвоенное первое и получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2z = -3, \\ \quad - y + 3z = 7. \end{cases}$$

Придавая неизвестной z произвольное действительное значение t, однозначно найдем из второго уравнения значение неизвестной y, затем из первого — значение x. В результате получим бесконечное множество решений вида $x = 4 - t$, $y = -7 + 3t$, $z = t$, где $t \in \mathbf{R}$.

Определение. *Системой* m *линейных уравнений с* n *неизвестными* называется совокупность уравнений следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — *неизвестные*, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — *свободные члены*, а величина a_{ij} называется *коэффициентом при* j-й неизвестной (неизвестной x_j) *в* i-ом уравнении системы для $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

В дальнейшем будут рассматриваться системы линейных уравнений с действительными коэффициентами и действительными свободными членами.

Прямоугольная таблица, составленная из коэффициентов a_{ij}, и состоящая из m строк и n столбцов, называется *матрицей системы линейных уравнений*.

Определение. *Матрицей* A *размерности* $m \times n$ *над множеством* M называется таблица элементов множества A, состоящая из m строк и n столбцов, которая обычно записывается в виде:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Элемент a_{ij} множества M находится в i-й строке и j-м столбце матрицы A. Коротко эту матрицу будем записывать следующим образом: $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$ или просто $A = (a_{ij})$.

Матрица $(A \mid B)$, полученная добавлением к матрице системы столбца свободных членов, называется *расширенной матрицей* системы. Таким образом, расширенная матрица системы линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Замечание. Между системами m линейных уравнений с n неизвестными и матрицами размерности $m \times (n + 1)$ существует взаимно однозначное соответствие.

Определение. Упорядоченный набор $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, состоящий из n действительных чисел, называется *решением* системы линейных уравнений, если при подстановке $x_j = x_j^0$, для $j = 1, 2, \dots, n$ каждое уравнение системы обращается в тождество.

В этом случае также говорят, что этот набор *удовлетворяет* уравнениям системы.

Определение. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет решений.

Определение. Система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет ровно одно решение, и *неопределенной,* если она имеет больше одного решения.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю, и *неоднородной* в противном случае.

Определение. Система линейных уравнений называется *квадратной*, если число ее уравнений совпадает с числом неизвестных.

Если число уравнений квадратной системы равно n, то говорят, что эта система уравнений имеет *порядок* n.

5.2. Метод Гаусса

Метод Гаусса последовательного исключения неизвестных, который мы использовали в примерах 1 и 2, приводит к тому, что решение исходной системы сводится с помощью исключения неизвестных к решению более простой системы уравнений.

Заметим, что при решении системы уравнений примера 1 мы могли преобразовывать не саму систему, а ее расширенную матрицу. Соответствующий ряд преобразований этой матрицы имеет следующий вид:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -9 & -27 \end{array}\right)$$

Выделим основные преобразования систем линейных уравнений (соответственно их расширенных матриц), которые применяются при использовании метода исключения неизвестных.

Определение. *Первое элементарное преобразование* системы линейных уравнений (ее расширенной матрицы) состоит в перестановке двух уравнений системы (двух строк матрицы).

Таким образом, система линейных уравнений S' получена из системы линейных уравнений S в результате первого элементарного преобразования, если два ее уравнения поменялись местами, а остальные уравнения не изменились.

Определение. *При втором элементарном преобразовании* системы линейных уравнений (расширенной матрицы) одно из уравнений (строк) заменяется суммой этого уравнения (строки) и некоторого другого (другой строкой), умноженного на произвольное действительное число, а остальные уравнения (строки) не изменяются.

Определение. *Третье элементарное преобразование* системы линейных уравнений (расширенной матрицы) состоит в умножении одного из уравнений (строки) на некоторое ненулевое действительное число, при этом остальные уравнения (строки) не изменяются.

Аналогично определяются элементарные преобразования над столбцами матрицы.

Будем называть i–е элементарное преобразование также элементарным преобразованием *типа* i.

Замечание. Если система линейных уравнений S' получается из системы линейных уравнений S в результате некоторого элементарного преобразования, то и система S получается из системы S' с помощью элементарного преобразования того же типа. Доказательство очевидно.

При перестановке i-го и j-го уравнений (строк матрицы) будем писать: $(i) \leftrightarrow (j)$; запись $(i) + c(j)$ означает, что к i-му уравнению (строке) было прибавлено j-е уравнение (соответственно строка), умноженное на число c; через $c(j)$ обозначается результат умножения j-го уравнения (строки) на число c.

Определение. Системы линейных уравнений, множества решений которых совпадают, называются *равносильными*, или *эквивалентными*.

Теорема 1. Две системы линейных уравнений, полученные одна из другой в результате конечного числа элементарных преобразований, равносильны.

Доказательство. Пусть система линейных уравнений S' получается из системы линейных уравнений S с помощью некоторого элементарного преобразования. Если система S' получается из S в результате элементарного преобразования первого или третьего типа, то, очевидно, произвольное решение системы S обращает в тождество каждое уравнение системы S', поэтому оно является решением S'.

Пусть система S' получается из системы S в результате второго элементарного преобразования, такого что $(i) \mapsto (i) + c(j)$. Пусть также $(x_1^{\text{o}}, x_2^{\text{o}}, \ldots, x_n^{\text{o}})$ — решение системы S. Подставим его в i–е уравнение системы S'. Имеем:

$$a'_{i1}x_1^{\text{o}} + \ldots + a'_{in}x_n^{\text{o}} = (a_{i1} + ca_{j1})\,x_1^{\text{o}} + \ldots + c(a_{in} + ca_{jn})\,x_n^{\text{o}} =$$
$$= (a'_{i1}x_1^{\text{o}} + \ldots + a'_{in}x_n^{\text{o}}) + c(a_{j1}\,x_1^{\text{o}} + \ldots + a_{jn}\,x_n^{\text{o}}) = b_i + cb_j = b'_i\,.$$

Таким образом, и в этом случае каждое уравнение системы S'обращается в тождество. Элементарные преобразования обратимы, поэтому любое решение системы S' также является решением системы S. Следовательно, системы S и S' равносильны. По методу математической индукции утверждение теоремы верно для любого конечного числа элементарных преобразований.

В общем случае метод Гаусса решения систем линейных уравнений заключается в следующем. Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений, общий вид которой приведен в п. 5.1.

Пусть в каждом уравнении системы коэффициенты при неизвестных $x_1, \ldots, x_{p-1}$ равны нулю, и в некотором уравнении существует ненулевой коэффициент при неизвестной x_p. Будем считать, что коэффициент a_{1p} не равен нулю (в противном случае переставим уравнение, содержащее неизвестную x_p с ненулевым коэффициентом, на первое место, используя первое элементарное преобразование).

Применим к каждому уравнению начиная со второго элементарное преобразование второго типа такое, что $(i) \mapsto (i) - \dfrac{a_{ip}}{a_{1p}}(1)$, для $i = 2, \ldots, m$. При этом получим, что коэффициент при неизвестной x_p равен $a_{ip} - \dfrac{a_{ip}}{a_{1p}}\,a_{1p} = 0$ для $i = 2, \ldots, m$. Таким образом, мы исключили неизвестное x_p из каждого уравнения, кроме первого.

Применим аналогичные рассуждения к системе, содержащей уравнения исходной системы, начиная со второго. В результате через конечное число шагов получится система линейных уравнений *ступенчатого вида*:

$$
\begin{cases}
a'_{1p}x_p + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a'_{1s}x_s + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\
\qquad\qquad a'_{2k}x_k + \ldots + a'_{2s}x_s + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a'_{rs}x_s + \ldots + a'_{rn}x_n = b'_r, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_{r+1}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_{r+2}, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots, \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_m,
\end{cases}
$$

где $a'_{1p} \cdot a'_{2k} \cdot \ldots \cdot a'_{rs} \neq 0.$

Полученная система несовместна, если существует хотя бы один отличный от нуля свободный член b'_i, для $i = r + 1, .., m$. В противном случае система совместна. Неизвестные x_p, x_k, …, x_s совместной системы линейных уравнений называются *главными* (их r), а остальные неизвестные — *свободными* (их $n - r$). Система является определенной, если $r = n$, и неопределенной, если $r < n$ (отметим, что $s \geq r$). Действительно, придавая каждой свободной неизвестной произвольное значение, однозначно найдем значения главных неизвестных: из r-го уравнения значение неизвестной x_s, и т. д., из второго — значение неизвестной x_k, наконец, из первого уравнения — значение неизвестной x_p.

Выражение главных неизвестных через свободные называется *общим решением* системы линейных уравнений; при подстановке конкретных значений свободных неизвестных получаются *частные решения* системы.

Замечание. Ниже будет показано, что количество ненулевых уравнений в системе ступенчатого вида, равносильной исходной системе, не зависит от способа приведения исходной системы к ступенчатому виду.

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. Произвольная система линейных уравнений равносильна некоторой системе ступенчатого вида.

Определение. *Матрицей ступенчатого вида* называется матрица, обладающая указанными ниже свойствами:

1) если некоторая ее строка нулевая, то следующая за ней также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i + 1)$- й строк расположены в столбцах с номерами n_i и n_{i+1}, то $n_i < n_{i+1}$.

Очевидно, что расширенная матрица системы ступенчатого вида является матрицей ступенчатого вида.

Повторяя рассуждение, проведенное для доказательства теоремы 2, получим следующее утверждение.

Теорема 3. Произвольную матрицу с помощью элементарных преобразований первого и второго типов над строками можно привести к ступенчатому виду.

Определение. Если одна матрица может быть получена из другой с помощью конечного числа элементарных преобразований, то такие матрицы называются *эквивалентными*.

Таким образом, произвольная матрица эквивалентна некоторой матрице ступенчатого вида.

Определение. Матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ *равны* $(A = B)$, если совпадают их размерности, а также $a_{ij} = b_{ij}$ для всех индексов i и j.

Матрица размерности $n \times n$ называется матрицей *порядка* n.

Если количество строк матрицы совпадает с количеством ее столбцов, то такая матрица называется *квадратной*.

Совокупность элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$, которые называются *диагональными элементами*, образует *главную диагональ* (или просто *диагональ*) квадратной матрицы порядка n, а множество элементов a_{1n}, $a_{2,n-1}, \ldots, a_{n1}$ — ее *побочную диагональ*.

Матрица, каждый элемент которой равен нулю, называется *нулевой*.

5.3. Определители

Понятие определителя вводится индуктивно методом разложения по первому столбцу.

Определение. *Определителем матрицы порядка* n называется функция det из множества матриц порядка n над $\mathbf{R}$ в множество действительных чисел такая, что

– если (a_{11}) — матрица первого порядка, то

$$\det(a_{11}) = a_{11};$$

– если порядок n матрицы $A = (a_{ij})$ более 1, то

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1},$$

где M_{i1} — определитель матрицы, полученной из матрицы A в результате удаления i–й строки и первого столбца, для $i = 1, \ldots, n$.

Определение. Определитель M_{ij} матрицы, полученной из матрицы A порядка n в результате удаления i–й строки и j–го столбца, называется *минором порядка* $n - 1$ матрицы A.

Определителем порядка n называется определитель матрицы порядка n.

Если $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n, то ее определитель обозначается также следующим образом:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Найдем определитель произвольной матрицы второго порядка. По определению имеем:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot |\, d\,| - c \cdot |\, b\,| = ad - bc.$$

Таким образом, определитель второго порядка равен разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример 4. Вычислим определитель произвольной матрицы третьего порядка. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Для вычисления определителей третьего порядка используется также *правило треугольников*. В разложение определителя произведение элементов главной диагонали, а также произведения элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, входят со знаком «+», а аналогичные произведения элементов, соответствующие треугольникам побочной диагонали — со знаком «–»:

(+) (–)

5.4. Свойства определителей

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольная матрица порядка n.

1° (умножение строки на число). При умножении строки на произвольное число весь определитель умножается на это же число.

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A в результате умножения i–й строки матрицы A на число c (при этом остальные строки не изменились). Покажем, что $\det A' = c \cdot \det A$, для любой строки с номером i матрицы A и для произвольного числа c, т. е. является верным равенство:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{i1} & \dots & ca_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Для доказательства применим метод математической индукции. Для $n = 1$ имеем: $\det(ca_{11}) = ca_{11} = c \cdot \det(a_{11})$. Таким образом, при $n = 1$ утверждение верно.

Предположим, что утверждение верно для любых матриц порядка $n - 1$. Рассмотрим матрицу A порядка n. Имеем:

$$\det A' = a_{11}M'_{11} - \ldots + (-1)^{i+1}ca_{i1}M'_{i1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M'_{n1},$$

где M'_{j1} — минор порядка $n - 1$ матрицы A', для $j = 1, \ldots, n$. Каждый из миноров M'_{j1}, при $j \neq i$ содержит измененную строку матрицы A. По предположению индукции, $M'_{j1} = cM_{j1}$ при $j \neq i$. Но $M'_{i1} = M_{i1}$. Следовательно,

$$\det A' = a_{11}cM_{11} - \ldots + (-1)^{i+1}ca_{i1}M_{i1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}cM_{n1} =$$
$$= c(a_{11}M_{11} - \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = c \cdot \det A.$$

Следствием доказанного утверждения является следующее свойство.

2° (нулевая строка). Определитель матрицы, имеющей нулевую строку, равен нулю.

Упражнение. Как изменится определитель матрицы A порядка 100, если удвоить каждый элемент этой матрицы?

3° (линейность по строке). Пусть матрица A' получена из матрицы A в результате сложения j–го элемента i–й строки матрицы A с некоторым числом b_j, для $j = 1, \ldots, n$, при этом остальные строки не меняются. Тогда $\det A' = \det A + \det B$, где B — матрица порядка n, которая отличается от матрицы A только i–й строкой, равной $(b_1, \ldots, b_n)$, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+b_1 & \ldots & a_{in}+b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & \ldots & b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Свойство 3 доказывается аналогично свойству 1.

Первое и третье свойства называют свойством линейности определителя по каждой строке: если строка умножается на число, то определитель умножается на то же число; определитель матрицы, одна из строк которой представляет собой сумму строк, равен сумме соответствующих определителей.

4° (перестановка двух строк). При перестановке двух строк определитель меняет знак.

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A в результате перестановки i–й и j–й строк матрицы A, при этом остальные строки не изменились, где $i \neq j$.

Покажем, что $\det A' = -\det A$.

Рассмотрим сначала случай перестановки двух соседних строк. Легко проверить, что при $n = 2$ утверждение верно.

Предположим, что утверждение верно для любого определителя порядка $n - 1$. Пусть порядок матрицы A равен n и переставлены строки с номерами i и $i + 1$, так, что

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

По определению имеем:

$$\det A' = a_{11}M'_{11} - \ldots + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}M'_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i1}M'_{i+1,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M'_{n1},$$

где M'_{k1} — минор порядка $n - 1$ матрицы A' для $k = 1, \ldots, n$.

Каждый из миноров M'_{k1}, при $k \neq i$ и $k \neq i + 1$, содержит две переставленные местами соседние строки матрицы A. Поэтому, по предположению индукции, если $k \neq i$ и $k \neq i + 1$, то $M'_{k1} = -M_{k1}$. Но $M'_{i1} = M_{i+1,1}$ и $M'_{i+1,1} = M_{i1}$. Следовательно,

$$\det A' = -a_{11}M_{11} + \ldots + (-1)^{i+2}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+1}a_{i+1,1}M_{i+1,1} - \ldots - (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1} = -(a_{11}M_{11} - \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i+1,1}M_{i+1,1} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}M_{n1}) = -\det A.$$

В общем случае пусть $i < j$ и пусть между строками (i) и (j) матрицы расположено k строк, где $k > 0$, т. е. порядок строк, расположенных между строками (i) и (j) включительно, имеет следующий вид: $(i)\underbrace{(i+1)...(j-1)}_{k}(j)$. Поменяем строку (i) последовательно с каждой из k следующих за ней строк. В результате получится следующее расположение строк: $(i+1)\ldots(j-1)(i)(j)$. При этом было сделано k перестановок двух соседних строк. Теперь последовательно поменяем местами строку (j) с каждой из $k+1$ предыдущих строк так, что в результате расположение строк будет следующим: $(j)(i+1)\ldots(j-1)(i)$.

Таким образом, строки (i) и (j) матрицы A поменялись местами, а остальные ее строки не изменились, при этом была сделана $2k+1$ перестановок соседних строк. Следовательно, число перемен знака определителя нечетное, и знак определителя меняется на противоположный.

В качестве следствия получим следующие два свойства определителя.

5° (две равные строки). Определитель матрицы, две строки которой совпадают, равен нулю.

Доказательство. Пусть матрица A имеет две одинаковые строки. Если поменять их местами, то матрица не изменится, а ее определитель изменит знак. Следовательно, имеет место равенство:

$$\det A = -\det A.$$

Поэтому $\det A = 0$.

Из свойства 5 вытекает, что если две строки матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю. В самом деле, если вынести коэффициент пропорциональности за знак определителя, то останется определитель с двумя одинаковыми строками, который, по свойству 5, равен нулю.

6° (сложение строки с другой строкой, умноженной на число). Если произвольную строку матрицы сложить с любой другой строкой этой же матрицы, умноженной на произвольное число, то определитель не изменится.

Доказательство. Пусть матрица A' получена из матрицы A в результате второго элементарного преобразования, такого что $(i) \mapsto (i) + c(j)$. Имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ca_{j1} & \dots & a_{in}+ca_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ca_{j1} & \dots & ca_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

для любых строк матрицы A с номерами i и j, такими что $i \neq j$, и произвольного числа c.

Определение. Матрица $A = (a_{ij})$ называется *верхнетреугольной*, если все ее элементы, расположенные «ниже» главной диагонали, равны нулю, т. е. если выполняется условие:

$$a_{ij} = 0 \text{ при } i < j.$$

7° (определитель верхнетреугольной матрицы). Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Доказательство. Для матриц первого порядка утверждение, очевидно, верно. Предположим, что оно верно для любой верхнетреугольной матрицы порядка $n - 1$. Рассмотрим произвольную верхнетреугольную матрицу порядка n. По определению имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Последнее равенство получено по предположению индукции.

Понятие определителя матрицы было введено с помощью разложения по первому столбцу. Покажем, что его можно вычислять, используя разложение по первой строке.

8° (разложение по первой строке). Для любого определителя порядка n верно равенство

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{1n}M_{1n} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Доказательство. При $n = 1$ и при $n = 2$ утверждение очевидно верно. Предположим, что оно верно для любого определителя порядка $n - 1$. Пусть A — произвольная матрица порядка n. По определению имеем:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}.$$

Каждый из миноров M_{i1} имеет порядок $n - 1$. Поэтому, по предположению индукции, любой минор M_{i1} можно разложить по первой строке. Имеем:

$$\det A = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} = a_{11}M_{11} +$$

$$+\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1i}^{1j} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j}a_{i1}a_{1j}M_{1i}^{1j},$$

где M_{1i}^{1j} — определитель матрицы, полученной из матрицы A в результате удаления строк с номерами 1 и i, а также столбцов с номерами 1 и j.

С другой стороны, разложим каждый из миноров M_{1j} по первому столбцу. Имеем:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j} = a_{11}M_{11} + \sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}M_{1j} = a_{11}M_{11} +$$

$$+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{j+1}a_{1j}\sum_{i=2}^{n}(-1)^{i+1}a_{i1}M_{1i}^{1j} = a_{11}M_{11} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{i+j}a_{i1}a_{1j}M_{1i}^{1j} = \det A.$$

Определение. Матрицей, *транспонированной* к матрице $A = \left(a_{ij}\right)_m^n$, называется матрица $A^t = \left(a'_{ij}\right)_n^m$, такая что $a'_{ij} = a_{ji}$, для любых индексов i и j.

Пример 5. По определению, получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

9° (определитель транспонированной матрицы). Определители матриц A и A^t совпадают.

Доказательство. Для произвольной матрицы первого порядка утверждение, очевидно, верно.

Предположим, что утверждение верно для любых матриц порядка $n-1$. Пусть A — произвольная матрица порядка n. По определению имеем:

$$\det A^t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} \det A'_{j1},$$

где матрица A'_{j1} получена из матрицы A^t удалением j–й строки и первого столбца, поэтому транспонированная к A'_{j1} матрица $(A'_{j1})^t$ получается из матрицы A удалением j–го столбца и первой строки, для $j = 1, \dots, n$. По предположению индукции, определитель матрицы $(A'_{j1})^t$ равен минору M_{1j}, для $j = 1, \dots, n$.

По свойству 8 имеем: $\det A^t = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} M_{1j} = \det A$.

Следствие. Свойства 1 – 6, сформулированные для строк, верны и для столбцов.

Покажем, что для вычисления определителя можно использовать разложение по произвольному столбцу, и, следовательно, по произвольной строке.

10° (разложение по произвольному столбцу). Для произвольной матрицы A имеет место равенство:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$$

где j — номер произвольного столбца матрицы A для $j = 1, \dots, n$.

Доказательство. Переставим столбец с номером j на первое место так, чтобы порядок остальных столбцов не изменился. При этом мы используем $j - 1$ перестановку соответствующих двух соседних столбцов. Таким образом, значение определителя умножится на число $(-1)^{j-1}$. Теперь разложим полученный определитель по первому столбцу. В результате будем иметь:

$$\det A = (-1)^{j-1}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_{ij}M_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij}.$$

Следствие. По свойству 9, верно равенство:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}M_{ij},$$

где i — номер произвольной строки матрицы A, для $i = 1, \ldots, n$.

Пример 6. Вычислим определитель следующего вида:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Преобразуем определитель так, чтобы каждый элемент первого столбца, кроме второго элемента, был равен нулю. Для этого вычтем из первой строки определителя удвоенную вторую, а из третьей строки — утроенную вторую строку. При этом по свойству 6 определитель не изменится. После этого разложим полученный определитель по первому столбцу. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -7 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -10 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Получился определитель третьего порядка. Для того чтобы упростить вычисления, вычтем из его второй строки первую, а затем применим правило треугольников. Таким образом, имеем:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -7 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -(-24-6-28+27) = 31.$$

5.5. Теорема Крамера

Определение. *Алгебраическим дополнением элемента* a_{ij} матрицы A называется число A_{ij}, такое что:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} — минор матрицы A.

Таким образом, разложения определителя матрицы A порядка n по столбцу с номером j и по строке с номером i можно записать в виде

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}.$$

Теорема 4 (о разложении по «чужому» столбцу или строке). Пусть A — квадратная матрица порядка n. Тогда для любого столбца с номером j выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{kj} = \begin{cases} \det A, & p = j, \\ 0, & p \neq j. \end{cases}$$

Аналогичное утверждение верно для строк. Сумма произведений элементов произвольной строки на алгебраические дополнения к элементам любой другой строки равна нулю.

Доказательство. Пусть $p \neq j$. Заменим j–й столбец определителя p–м столбцом и разложим полученный определитель по столбцу с номером j. В результате получится выражение $\sum_{k=1}^{n} a_{kp} A_{kj}$. С другой стороны, полученный определитель имеет два одинаковых столбца, поэтому он равен 0. Рассуждение для строк аналогично.

Теорема Крамера. Пусть определитель Δ матрицы A квадратной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

отличен от нуля. Тогда эта система имеет единственное решение ($x_1^{o}, x_2^{o}, \ldots, x_n^{o}$), такое что

$$x_j^{o} = \frac{\Delta_j}{\Delta},$$

где Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j–го столбца столбцом свободных членов, для $j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть j — номер произвольного столбца матрицы A. Умножим k–е уравнение системы на алгебраическое дополнение A_{kj} для $k = 1, 2, \ldots, n$, а затем сложим все уравнения. В результате получится уравнение, в котором все коэффициенты, кроме j–го, равны нулю. Коэффициент с номером j в свою очередь равен Δ. Значение выражения правой части $\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}$ полученного уравнения равно Δ_j. Таким образом, уравнение имеет вид: $\Delta x_j = \Delta_j$. Так как $\Delta \neq 0$, то $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$.

Итак, мы показали, что если решение существует, то оно может быть получено указанным в условии теоремы способом, который называется *правилом Крамера*. Покажем теперь, что набор $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$ действительно является решением данной системы линейных уравнений. Пусть i — номер произвольного уравнения системы. Подставим в него значения $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, для $j = 1, 2, \ldots, n$. Имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Delta_j = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} b_k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i.$$

Таким образом, указанный набор является единственным решением данной системы линейных уравнений.

Следствие. Если квадратная система линейных уравнений имеет более одного решения или является несовместной, то определитель ее матрицы равен нулю.

Пример 7. Рассмотрим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y + z = 5, \\ x + 2y + z = 2, \\ x + y + 2z = 1. \end{cases}$$

Для того чтобы проверить, можно ли применить правило Крамера, найдем определитель системы. Имеем:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Определитель Δ отличен от нуля, поэтому, по теореме Крамера, система имеет единственное решение, которое можно вычислить, используя правило Крамера. Имеем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \;\; \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \;\; \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Таким образом, система имеет следующее решение: $(3, 0, -1)$.

5.6. Ранг матрицы

Определение. Пусть A — матрица размерности $m \times n$. Определитель матрицы порядка k, состоящей из элементов, расположенных на пресечении некоторых выделенных k строк и k столбцов матрицы A, называется *минором порядка* k матрицы A.

Определение. *Рангом матрицы* A называется наибольший из порядков ее ненулевых миноров.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$.

Определение. Ненулевой минор матрицы, порядок которого равен ее рангу, называется *базисным минором* этой матрицы.

Покажем, что ранг матрицы можно вычислять по методу Гаусса.

Теорема 5. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r и пусть матрица A' получена из матрицы A в результате некоторого элементарного преобразования над ее строками. Покажем, что если r' — ранг матрицы A', то $r' \geq r$.

Пусть M — базисный минор матрицы A.

При первом элементарном преобразовании найдется такой минор M' матрицы A', который может отличаться от M только перестановкой строк, а следовательно, только знаком. Поэтому $M' \neq 0$.

Для третьего элементарного преобразования рассмотрим минор M' матрицы A', образованный элементами с теми же номерами строк и столбцов, что и минор M матрицы A. Тогда минор M' может отличаться от M только умножением на ненулевое число, поэтому он не равен нулю.

Пусть матрица A' получена из матрицы A в результате второго элементарного преобразования, такого что $(i) \mapsto (i) + c(j)$. Предположим, что существует некоторый базисный минор M_1 матрицы A, не содержащий строку с номером i, или содержащий обе строки с номерами i и j. Тогда M_1 является и минором матрицы A', поэтому ее ранг не меньше, чем r. Пусть каждый базисный минор M матрицы A содержит строку матрицы A с номером i и не содержит строку с номером j. Тогда любой минор порядка r матрицы A', не содержащий строку с номером i, равен нулю. Рассмотрим минор M' матрицы A', образованный элементами с теми же номерами строк и столбцов, что и минор M матрицы A.

Разложим минор M' по измененной строке. Имеем: $M' = M + cM''$, где M'' — определитель матрицы, которая может отличаться от некоторого минора матрицы A', не содержащего строку с номером i, только перестановкой строк. Следовательно, $M'' = 0$, и $M' = M$. Поэтому $M' \neq 0$.

Таким образом, $r' \geq r$. Элементарные преобразования обратимы, следовательно, $r \geq r'$. Итак, ранги матриц A и A' совпадают.

Следствие. Ранг матрицы равен количеству ненулевых строк в эквивалентной ей матрице ступенчатого вида.

Доказательство. Любую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду. Пусть матрица ступенчатого вида содержит r ненулевых строк. Тогда любой ее минор порядка более r содержит нулевую строку, поэтому он равен нулю. Очевидно, что в этой матрице найдется отличный от нуля минор порядка r. Поэтому ее ранг равен r.

В качестве следствия получаем следующее важное утверждение.

Теорема 6. Пусть S — некоторая система линейных уравнений. Тогда количество уравнений с ненулевыми коэффициентами в системе ступенчатого вида, равносильной S, не зависит от способа приведения системы S к ступенчатому виду и равно рангу матрицы системы S.

Покажем, что при транспонировании матрицы ее ранг не изменяется.

Теорема 7. Пусть A — произвольная матрица. Тогда ранги матриц A и A^t совпадают.

Доказательство. Пусть ранг матрицы A равен r и M — базисный минор матрицы A. Тогда минор матрицы A^t, образованный теми же номерами строк и столбцов, что и номера столбцов и строк матрицы A, элементы которых образуют M, равен M, и, следовательно, отличен от нуля. Любой минор матрицы A^t, порядок которого более r, также совпадает с соответствующим минором матрицы A, поэтому он равен нулю. Таким образом, ранг матрицы A^t равен r.

Теорема 8. Определитель квадратной матрицы отличен от нуля тогда и только тогда, когда его порядок совпадает с рангом матрицы.

Доказательство. Выше было показано, что с помощью элементарных преобразований первого и второго типа произвольную квадратную матрицу можно привести к ступенчатому верхнетреугольному виду. При этом абсолютная величина ее определителя не изменится.

Таким образом, определитель будет отличен от нуля тогда и только тогда, когда в полученной матрице не будет ненулевых строк, что равносильно условию равенства ранга порядку определителя.

5.7. Теорема Кронекера–Капелли

Теорема Кронекера–Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы совпадает с рангом ее расширенной матрицы.

Доказательство. Выше было показано, что любую систему линейных уравнений S с расширенной матрицей $(A \mid B)$ можно привести методом Гаусса к эквивалентной ей системе ступенчатого вида с некоторой расширенной матрицей $(A' \mid B')$. Расширенные матрицы $(A \mid B)$ и $(A' \mid B')$ эквивалентны, поэтому их ранги совпадают. Аналогично, $r(A) = r(A')$.

Система ступенчатого вида, как было показано ранее, совместна тогда и только тогда, когда число ненулевых строк ее расширенной матрицы совпадает с числом ненулевых строк ее матрицы, т. е. тогда и только тогда, когда $r(A' \mid B') = r(A')$. Очевидно, что последнее равенство равносильно следующему условию:

$$r(A \mid B) = r(A).$$

Определение. *Рангом* совместной системы линейных уравнений называется ранг матрицы этой системы.

Определение. Пусть S — совместная система линейных уравнений и A — ее матрица, такая, что $r(A) = r$. Неизвестные $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ системы S называются *главными*, если существует базисный минор матрицы A, составленный из коэффициентов при этих неизвестных.

Если $x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}$ — главные неизвестные системы S, то остальные ее неизвестные называются *свободными*.

Теорема 9. Главные неизвестные совместной системы линейных уравнений однозначно выражаются через свободные.

Доказательство. Пусть S — совместная система линейных уравнений и A — ее матрица, такая что $r(A) = r$. Предположим, что минор M матрицы A, образованный ее первыми r строками и первыми r столбцами, является базисным. Тогда в качестве главных неизвестных можно выбрать неизвестные $x_1, \ldots, x_r$. Остальные $n - r$ неизвестных являются свободными.

Рассмотрим систему уравнений, состоящую из первых r уравнений системы S. Перенесем в каждом уравнении этой системы все слагаемые, содержащие свободные неизвестные, из левой части в правую часть. Получится система уравнений S' с неизвестными $x_1, \ldots, x_r$ следующего вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Положим $b_i' = b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n$, для $i = 1, \ldots, r$. Определитель M матрицы квадратной системы линейных уравнений S' отличен от нуля. По теореме Крамера система S' имеет единственное решение, причем значения неизвестных имеют вид

$$x_j = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{r} b_i' A_{ij}' = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{r}\left(b_i - a_{ir+1}x_{r+1} - \ldots - a_{in}x_n\right)A_{ij}',$$

где A_{ij}' — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} матрицы A', составленной из элементов первых r строк и первых r столбцов матрицы A, для $j = 1, \ldots, r$. Таким образом, выражение главных неизвестных через свободные неизвестные определяется однозначно и имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ x_r = c_r + c_{rr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{rn}x_n. \end{cases}$$

Следствиями проведенных выше рассуждений являются изложенные далее утверждения.

Утверждение 1. Совместная система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее ранг совпадает с числом ее неизвестных, и бесконечное множество решений тогда и только тогда, когда ее ранг меньше числа неизвестных.

Отметим, что однородная система линейных уравнений всегда совместна. В самом деле, она всегда имеет по крайней мере нулевое решение, т. е. решение, каждая компонента которого равна нулю. Для однородной системы следствиями предыдущего утверждения являются следующие утверждения 2 и 3.

Утверждение 2. Однородная система линейных уравнений имеет только нулевое решение тогда и только тогда, когда ее ранг совпадает с числом ее неизвестных.

Утверждение 3. Если число уравнений однородной системы линейных уравнений меньше числа неизвестных, то она имеет ненулевое решение.

Утверждение 4. Совместная квадратная система линейных уравнений имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля, и бесконечное множество решений, если он равен нулю.

В частности, верно следующее утверждение.

Утверждение 5. Определитель однородной квадратной системы линейных уравнений равен нулю тогда и только тогда, когда она имеет ненулевое решение.

Отметим, что если ранг системы линейных уравнений меньше числа уравнений, то она равносильна некоторой системе, число уравнений которой равно ее рангу.

Упражнения

5.1. Решите систему линейных уравнений:

1) $2x + y = -1,$
$3x + 2y = -3;$

2) $2x + y + z = 0,$
$-x + 2y + z = -3,$
$3x - 2y + 2z = -1;$

3) $x + 2y - z - t = 5,$
$2x - y + z + 2t = -2,$
$3x - 4y + 3z + 5t = -9,$
$x - 3y + 2z + 3t = -7$

4) $x + y - z - t = -4,$
$x + 2y + z - 2t = 3.$

5.2. Найдите коэффициенты многочлена $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, если $f(-2) = 14$, $f(-1) = 3$, $f(1) = -1$ и $f(2) = 18$.

5.3. Решите систему линейных уравнений при всех значениях параметра a:

$$\begin{aligned} x + 2y + z + t &= 1, \\ x - y + z - 2t &= 1, \\ x + 3y - z - t &= 6, \\ -x + 2y - 3z &= a \end{aligned}$$

5.4. Вычислите значение определителя:

1) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix}$.

5.5. Решите уравнение $f(x) = 0$, если

$$f(x) = \begin{vmatrix} 3 & 2x \\ 3x & 4x \end{vmatrix}.$$

5.6. Найдите значение параметра a, при котором уравнение $f(x) = 0$ имеет единственное решение, если

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2 & x & a \\ 3 & 2 & x \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.7. Найдите значение параметра a такого, что

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 9.$$

5.8. Решите методом Крамера систему линейных уравнений

$$\begin{aligned} 15x - 10y + 2z &= -1, \\ 5x + 2y + z &= 2, \\ 3x + 7y + z &= 4. \end{aligned}$$

5.9. Найдите ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 11 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

5.10. При всех значений параметра a найдите ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & a & 1 \\ -1 & 3 & 7 & a \end{pmatrix}.$$

5.11. Найдите значение параметра a, при котором однородная система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z \phantom{{}+t} &= 0, \\ y + z + t &= 0, \\ x \phantom{{}+y} + z + t &= 0, \\ 2x + 2y + az + 2t &= 0 \end{aligned}$$

имеет ненулевое решение.

5.12. Найдите значение параметра a, при котором система линейных уравнений

$$\begin{aligned} x + y + z - 2t &= 1, \\ x - 2y - 5z + t &= 1, \\ x \phantom{{}-2y} - 2z + t &= 2, \\ x + ay + 4z - 2t &= 0 \end{aligned}$$

не является определенной. Выясните, является ли данная система уравнений при таком значении параметра несовместной или неопределенной.